# ÜBER DISKRETE UND KONTINUIERLICHE ANALOGA ZU REAKTIONS-DIFFUSIONSGLEICHUNGEN

DISSERTATION
der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
vorgelegt

von

ULRIKE VON HEHN

1983

# ÜBER DISKRETE UND KONTINUIERLICHE ANALOGA ZU REAKTIONS-DIFFUSIONSGLEICHUNGEN

DISSERTATION
der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
vorgelegt

von

ULRIKE VON HEHN

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 24. III. 1983

Dekan: Prof.Dr.A.Schönhage

1. Berichterstatter: Prof.Dr.K.-P.Hadeler

2. Berichterstatter: Prof.Dr.M.Wolff

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

I. Die diskreten Modelle

1. Die Herleitung der Rekursionsgleichungen

a) Das Neumann-Problem 7

b) Das Dirichlet-Problem 10

2. Abschätzungen für die Lösungen und Konvergenz gegen den stationären Zustand

a) Das Neumann-Problem 13

b) Das Dirichlet-Problem 17

3. Interaktion zwischen Migration und Reproduktion

a) Reine Reproduktion 21

b) Das Neumann-Problem 25

c) Das Dirichlet-Problem 31

II. Die bezüglich des Raumes kontinuierlichen, bezüglich der Zeit diskreten Modelle

1. Die Herleitung der Rekursionsgleichungen

a) Das Neumann-Problem 38

b) Das Dirichlet-Problem 40

2. Abschätzungen für die Lösungen und Konvergenz gegen den stationären Zustand

a) Das Neumann-Problem 43

b) Das Dirichlet-Problem 49

3. Interaktion zwischen Migration und Reproduktion

a) Das Neumann-Problem 53

b) Das Dirichlet-Problem 55

III. Die skalaren kontinuierlichen Modelle

1.a) Kurze Herleitung der Gleichungen 57

b) Bezeichnungen und Voraussetzungen 59

2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen und ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten 62

3. Ein Vergleichssatz und zwei Maximum-Prinzipien 65

4. Stationäre Lösungen der linearen Gleichungen: Existenz- und Konvergenzsätze

a) Das Neumann-Problem 73

b) Das Dirichlet-Problem 76

5. Stationäre Lösungen der semilinearen Gleichungen: Existenz- und Konvergenzsätze

a) Das Neumann-Problem 79

b) Das Dirichlet-Problem 82

IV. Die semilinearen kontinuierlichen Gleichungssysteme

1.a) Bezeichnungen und Voraussetzungen 88

b) Ein Existenzsatz 90

2. Ein Invarianzprinzip 91

3. Ein Konvergenzsatz für die Lösungen des Neumann-Problems 95

4. Das stationäre Gleichungssystem des Dirichlet-Problems 102

V. Die nichtlinearen kontinuierlichen Modelle

1.a) Die Gleichungen 109

b) Ein Existenzsatz 110

2. Ein Vergleichssatz und das schwache Maximum-Prinzip 111

3. Konvergenz der Lösungen des Neumann-Problems 113

4. Die stationäre Gleichung des Dirichlet-Problems 114

Literaturverzeichnis 116

## Einleitung

Mathematische Modelle zur Beschreibung biologischer Migrationsvorgänge - Ausbreitung eines vorteilhaften Gens oder einer Epidemie, Wanderung ganzer Populationen - enthalten meistens einen Diffusionsterm. Die untersuchten Gleichungen sind dementsprechend i.a. semilineare oder lineare parabolische Differentialgleichungen, je nachdem, ob Reproduktionsvorgänge berücksichtigt werden oder nicht (vgl. z.B. P.C. Fife). Zwar benutzten Kermack und McKendrick in ihrem bekannten Epidemie-Modell (1927) zur Beschreibung der räumlichen Ausbreitung einer Infektion ursprünglich einen Faltungsoperator; dieser wurde jedoch hier wie auch in vielen folgenden Arbeiten (vgl. z.B. D.G.Kendall) für die weitere mathematische Analyse durch einen Diffusionsoperator ersetzt.

Vor rund zehn Jahren begannen Mollison, Aronson, Weinberger u.a. Modelle zu untersuchen, die statt der - lokalen - Diffusion die ursprüngliche räumliche Mittelung und damit einen nicht lokal wirkenden Operator enthalten. Die resultierenden Gleichungen sind lineare oder nichtlineare Integro-Differentialgleichungen bzw. Volterra-Fredholm-Intergralgleichungen vom Faltungstyp wie z.B. die folgende Gleichung einer einfachen Epidemie (Mollison [2]):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = aS(t,x)(\overline{S}(t,x) - 1) \qquad (1)$$

mit $$\overline{S}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} S(t,\xi)V(x-\xi)d\xi \quad .$$

Hier ist S die Dichte der Suszeptiblen, V eine räumliche Gewichtsfunktion, a ein Parameter.

Die ebenfalls innerhalb dieses Rahmens behandelten populationsgenetischen Modelle, die meist Verallgemeinerungen des bekannten Fisher-

Modells (1937) sind, erhält man als Grenzfall einer Differenzengleichung der Form

$$u^{n+1} = Q(u^n) \quad , n = 0,1,\ldots \quad . \tag{2}$$

Dabei ist u die Genfrequenz, Q ein nichtlinearer Faltungsoperator mit der Gewichtsfunktion k :

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x - y)g(u(y))dy \quad ; \tag{3}$$

g beschreibt die Selektion innerhalb der Population, und ein Beobachtungsintervall $[n, n+1]$ entspricht der Dauer $\tau$ einer Generation. Die entsprechende Differentialgleichung ergibt sich für $\tau \to 0$ (s. Weinberger [2]). Dazu schreibt Weinberger ([2],S.92): " It must ... be remembered that our model assumes that the entire population reproduces and dies in each time interval of length $\tau$ . Thus the limit as $\tau$ approaches zero is a better model for a slapstick comedy than for a biological system." Aus diesem Grunde geht Weinberger in [2] zurück auf die Differenzengleichung (2),(3).

Da die Verteilung der Individuen einer Population im Raum durch eine stetige Funktion nur unzureichend beschrieben werden kann, geht er in [3] einen Schritt weiter und betrachtet Modelle, die bezüglich Zeit und Raum diskret sind :

$$u^{n+1} = Mg(u^n) \quad , n = 0,1,\ldots; \tag{4}$$

hier ist $u = (u_1,\ldots,u_p)^*$ ein Vektor, $u_i$ die Genfrequenz im i-ten Gebiet; $M \geq 0$ ist die Matrix der Migrationskoeffizienten, und g beschreibt wieder die Selektion.

Hauptansatzpunkt in allen bisher genannten Arbeiten ist die Frage nach der Existenz wandernder Wellenfronten und deren möglichen Geschwindig-

keiten (vgl. auch Atkinson/Reuter, Diekmann [1]-[4], Diekmann/Kaper, Schumacher [1],[2]). In einem stärker genetisch orientierten Zusammenhang beschäftigte sich S.Karlin mit Rekursionsgleichungen der Form (4), so z.B. mit dem Problem der Existenz 'geschützter Polymorphismen' in Abhängigkeit von g und M.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, zunächst reine Migrationsvorgänge, beschrieben durch räumliche Mittelungsoperatoren, zu untersuchen, dann auch solche, die von Reproduktionsvorgängen überlagert werden. Wie bereits durch die Beispiele angedeutet, geschieht dies auf drei Stufen:

1. Modelle mit diskreter Raum- und Zeitvariable ,
2. Modelle mit kontinuierlicher Raumvariable und diskreter Zeitvariable,
3. Modelle mit kontinuierlicher Raum- und Zeitvariable.

Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß der Raum homogen ist, so daß die Mittelungsoperatoren nicht vom Faltungstyp sein müssen.

In Anlehnung an die Theorie der Diffusionsgleichungen, zu der natürlicherweise starke Analogien bestehen, werden wir uns vor allem mit einigen grundlegenden Problemen wie Invarianzprinzipien, Existenz stationärer Lösungen und Konvergenzfragen beschäftigen. Die behandelten Gleichungen werden dabei im allgemeinen in einem ökologischen Zusammenhang verstanden. Eine populationsgenetische Interpretation der Größen und Modelle ist jedoch ebenfalls möglich.

Eine Frage, die in den oben zitierten Arbeiten kaum angesprochen wird, ist die nach der adäquaten Behandlung von Randwertproblemen. Abhängig von der Art der Randbedingung untersuchen wir die Migration der Population mit Hilfe verschiedener Operatoren, die zwei Klassen von Modellen entsprechen: Die Gleichungen der ersten Klasse beschreiben eine Population, deren Bevölkerungsgröße konstant bleibt, solange

Reproduktionsvorgänge ausgeschaltet sind. Wie in der Theorie der Diffusionsgleichungen werden sie Neumann-Probleme genannt. Für die Gleichungen der zweiten Klasse, die wir Dirichlet-Probleme nennen, nehmen wir an, daß die Gebietsgrenzen der Population offen sind und somit Individuen ab- und zuwandern können. Dabei stellt man sich vor, daß außerhalb des eigentlichen Lebensraumes der Population - 'auf dem Rand' - Gebiete existieren, die als Reservoire betrachtet werden können und in denen die Populationsdichte zeitlich konstant ist. Die Wanderungsraten der Population sind dann gegeben durch eine räumliche Mittelung über den Lebensraum und die Reservoire.

Bei den folgenden Untersuchungen wurde auf größtmögliche Allgemeinheit verzichtet, da es vor allem wichtig erschien, die Grundmuster der Beweisführungen herauszuarbeiten und anschaulich zu machen.

In Kapitel I beschäftigen wir uns mit den diskreten Gleichungen. Ausgehend von einem Inselmodell werden zunächst die reinen Migrationsgleichungen hergeleitet. Dabei ist zu beachten, daß die hier auftretenden Matrizen in den Gleichungen für die Populationsgröße bzw. die Populationsdichte nur formal den von Karlin eingeführten Vorwärts- bzw. Rückwärtsmigrationsmatrizen entsprechen, da bei Karlin auch Selektionsvorgänge Einfluß auf die Migrationskoeffizienten haben, während wir Reproduktion vorerst ausschließen.

Abhängig von den Eigenschaften der Matrizen (Irreduzibilität, Primitivität) erhält man unterschiedlich 'starke' Maximum-Prinzipien sowohl für die reinen Migrationsgleichungen wie dann auch für die Reproduktion berücksichtigenden Rekursionsgleichungen. Schließlich kann man zeigen, daß unter biologisch plausiblen Bedingungen die untersuchten Gleichungen eindeutig bestimmte stationäre Punkte besitzen, gegen die die Lösungen konvergieren.

Beim Übergang zu den bezüglich der Raumvariablen kontinuierlichen Modellen werden die Migrationsmatrizen durch lineare Integraloperatoren ersetzt, die durch stetige Kerne definiert sind. Um die Ergebnisse von Kapitel I auf diese Gleichungen übertragen zu können, benötigt man Analoga zu den für Matrizen eingeführten Begriffen der Irreduzibilität und der Primitivität. Wie in Kapitel II gezeigt, eignen sich für die hier betrachteten Probleme die auf Krasnoselskij bzw. Krein/Rutman zurückgehenden Begriffe der $u_o$-Positivität und der starken Positivität eines Operators.

Im Hauptteil dieser Arbeit, den Kapiteln III und IV, werden die linearen und die semilinearen kontinuierlichen Analoga zur Diffusionsgleichung behandelt, und zwar zunächst die skalaren Gleichungen, in Kapitel IV dann die Gleichungssysteme. Wie aus den Beweisen z.B. der Maximum-Prinzipien ersichtlich ist, genügt es häufig, die Beweise der entsprechenden Sätze für Diffusionsgleichungen zu modifizieren, während die Grundideen übernommen werden können.

Für das skalare Neumann-Problem folgt die Konvergenz der Lösungen aus dem Maximum-Prinzip und den Monotonieeigenschaften der Gleichung.

Im mehrdimensionalen Fall geht man folgendermaßen vor: Für das nur Reproduktion beschreibende Differentialgleichungssystem $\dot{u} = f(u)$ fordert man die Existenz einer konvexen, nach unten beschränkten Lyapunov-Funktion. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine Art räumlicher Lyapunov-Funktion für das auch Migration beschreibende System konstruieren. Aus deren Eigenschaften ergibt sich die Konvergenz der Lösungen des semilinearen Problems . Für diesen letzten Schluß benötigt man wesentlich die - nicht triviale - Kompaktheit der Limesmenge, die man jedoch nur unter der Voraussetzung erhält, daß f Lipschitz-beschränkt ist mit einer Lipschitz-Konstanten $F < 1$.

Dieselbe Bedingung benötigt man, um die Existenz einer stationären Lösung des mehrdimensionalen semilinearen Dirichlet-Problems zu erhalten. In diesem Fall ist der Operator, dessen Fixpunkte die gesuchten Lösungen sind, verdichtend, und man kann die Theorie des Abbildungsgrades anwenden.
Den Abschluß der Arbeit bilden einige Ergebnisse über die nichtlinearen kontinuierlichen Gleichungen.

Herrn Prof.Dr.K.P.Hadeler danke ich sehr herzlich für die Überlassung des Dissertationsthemas und für die anregende und geduldige Betreuung der Arbeit.

## I. DIE DISKRETEN MODELLE

### 1. Die Herleitung der Rekursionsgleichungen

#### a) Das Neumann- Problem

Wir betrachten einen Biotop, der aus p "Inseln" $\mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_p$ (z.B. geographischen oder ökologischen Nischen) besteht, und eine Population, deren Lebensraum diese Inseln bilden. Die "Größe" der i-ten Insel sei $c_i > 0$, $i=1,\ldots,p$. Die Dimension der $c_i$ sei hier "Anzahl der Individuen", und "Größe" werde aufgefaßt als Kapazität einer Insel, also als optimale, nicht als maximale Belegung.

Es seien

$$\mathcal{C} := \sum_{i=1}^{p} c_i$$

und $c := (c_1,\ldots,c_p)^*$ , $1_p := (\underbrace{1,\ldots,1}_{p})^*$ .

Dann ist

$$1_p^* c = \mathcal{C} \ .$$

Die Populationsgröße auf $\mathcal{J}_i$ sei $U_i$ ; $u_i = \frac{U_i}{c_i}$ ist somit die Populationsdichte auf $\mathcal{J}_i$ ; $u_i$ kann größer als 1 werden.

Wir führen nun eine diskrete Zeit $t = 0,1,\ldots$ ein. Werden auch Reproduktionsvorgänge innerhalb der Population betrachtet, so entspricht dies der Annahme getrennter Generationen. $U_i^t$ bzw. $u_i^t$ seien die Größe bzw. die Dichte der Population auf $\mathcal{J}_i$ zur Zeit t.

Die Größe $\tilde{U}^t$ der gesamten Population zur Zeit t ist gegeben durch

$$\tilde{U}^t = \sum_{i=1}^{p} U_i^t = \sum_{i=1}^{p} c_i u_i^t \ . \qquad (1.1)$$

Dann ist

$$\tilde{u}^t = \frac{\tilde{U}^t}{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i}{\mathcal{C}} u_i^t$$

die mittlere Dichte der Gesamtpopulation.

Die Individuen können zwischen den Inseln wandern. Sei $\varkappa_{ij}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zum Zeitpunkt t auf $\mathcal{J}_j$ sich befindendes Individuum bis zum Zeitpunkt t+1 nach $\mathcal{J}_i$ gewandert ist.

Dann gilt

$$\varkappa_{ij} \geq 0 \ , \quad \sum_{i=1}^{p} \varkappa_{ij} = 1 \ , \ j=1,\dots,p \ . \tag{1.2}$$

Die $\varkappa_{ij}$ werden zu der spaltenstochastischen Migrationsmatrix $\Phi := (\varkappa_{ij})$ zusammengefaßt. Damit erhält man

$$1_p^* \cdot \Phi = 1_p^* \ . \tag{1.3}$$

Im Zeitschritt $(t,t+1]$ wandern $\varkappa_{ij} U_j^t$ Individuen von $\mathcal{J}_j$ nach $\mathcal{J}_i$, so daß für die Populationsgrößen die folgende Beziehung gilt:

$$U_i^{t+1} = U_i^t - \sum_{j=1}^{p} \varkappa_{ji} U_i^t + \sum_{j=1}^{p} \varkappa_{ij} U_j^t \ ,$$

also mit (1.2)

$$U_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{p} \varkappa_{ij} U_j^t \ . \tag{1.4}$$

Definiert man $U^t := (U_1^t,\dots,U_p^t)^*$, so ergibt sich

$$U^{t+1} = \Phi \cdot U^t \ , \tag{1.5a}$$

und für die Anfangsbedingung fordert man natürlicherweise

$$U^0 \geq 0 \ . \tag{1.5b}$$

Dabei wird " $\geq$ " in Kapitel I immer im Sinne der üblichen Halbordnungen in $\mathbb{R}^p$ oder $\mathbb{R}^q$ bzw. $\mathbb{R}^{p^2}$ oder $\mathbb{R}^{pq}$ benutzt, die jeweils vom Kegel der nichtnegativen Vektoren erzeugt werden.

Mit (1.3) und (1.1) folgt aus (1.5) die Invarianz der Populationsgröße

$$1_p^* \cdot U^{t+1} = 1_p^* \cdot U^t = 1_p^* \cdot U^0 =: \tilde{U}. \tag{1.6}$$

Ein nichtnegativer Rechtseigenvektor $\overline{U}$ zum Eigenwert 1, also $\Phi \overline{U} = \overline{U}$, entspricht einer stationären Verteilung der Population. Die Größen $c_i$ gehen hier nicht ein.

Für die Populationsdichten erhält man die zu (1.4) analoge Rekursion

$$u_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{p} c_i^{-1} \ae_{ij} c_j u_j^t \quad . \tag{1.7}$$

Setzt man $C := \operatorname{diag}(c_1,\ldots,c_p)$, $K = (k_{ij}) := C^{-1}\Phi C$ und $u^t := (u_1^t,\ldots,u_p^t)^*$, so lautet (1.7)

$$u^{t+1} = Ku^t \quad . \tag{1.8a}$$

Dabei sei wieder

$$u^o \geq 0 \quad . \tag{1.8b}$$

Die Matrix K ist i.a. nicht stochastisch, aber nichtnegativ.
Mit (1.3) ergibt sich für K die Gleichung

$$c^* \cdot K = c^* \quad , \tag{1.9}$$

Also ist der Vektor der Inselgrößen ein Linkseigenvektor von K zum Eigenwert 1. Zu einem Rechtseigenvektor $\bar{U}$ von $\Phi$ ist $C^{-1}\bar{U} = \bar{u}$ der entsprechende Rechtseigenvektor von K. Der Vektor $\bar{u}$ enthält demnach die Inselgrößen.
Mit (1.9) folgt

$$c^* \cdot u^{t+1} = c^* \cdot u^t = c^* \cdot u^o = \tilde{U} \quad . \tag{1.10}$$

Wir definieren die mittlere Populationsdichte

$$\tilde{u} := \frac{\tilde{U}}{\ell} = \frac{1}{\ell} c^* \cdot u^o \quad .$$

Fordert man zusätzlich, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, innerhalb eines Zeitschrittes zur Insel $\mathcal{J}_i$ zu wandern, proportional zu $c_i$ mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{\ell}$ ist, dann erhält man

$$\Phi \cdot c = c \tag{1.11}$$

und somit

$$K\mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p \quad . \tag{1.12}$$

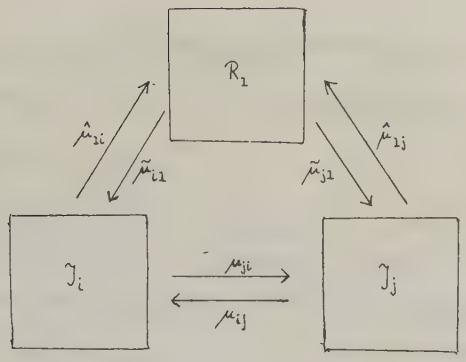
Unter dieser Voraussetzung ist K also zeilenstochastisch.
Wegen der Abgeschlossenheit der Population (s. (1.6), (1.10)) nennen wir (1.5) bzw. (1.8) das Neumann-Problem.

b) Das Dirichlet-Problem

Man betrachte einen Biotop wie in a), $\mathcal{J}_i$, $c_i$ $(i = 1,\ldots,p)$ und $\mathcal{C}$ seien definiert wie oben. Angekoppelt an diesen Biotop seien q "Reservoire" $R_1,\ldots,R_q$ der Größe $\tilde{c}_l > 0$ $(l = 1,\ldots,q)$ mit

$$\tilde{\mathcal{C}} := \sum_{l=1}^{q} \tilde{c}_l \quad .$$

Die Populationsgrößen und -dichten auf den Inseln seien bezeichnet wie in a). Die vorgegebene, zeitunabhängige Populationsgröße in $R_l$ sei $\Psi_l$, die Dichte dort entsprechend $\gamma_l = \frac{\Psi_l}{\tilde{c}_l}$. Wir definieren $\Psi := (\Psi_1,\ldots,\Psi_q)^*$, $\gamma := (\gamma_1,\ldots,\gamma_q)^*$ und $\tilde{c} := (\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_q)^*$.
Die Individuen können zwischen den Inseln, aus den Reservoiren auf die Inseln und von den Inseln in die Reservoire wandern. Sei $\mu_{ij}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zum Zeitpunkt t auf $\mathcal{J}_j$ sich befindendes Individuum bis zum Zeitpunkt t+1 nach $\mathcal{J}_i$ gewandert ist, $i,j = 1,\ldots,p$; sei $\tilde{\mu}_{il}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum innerhalb des nächsten Zeitschrittes von $R_l$ nach $\mathcal{J}_i$ gewandert ist und sei $\hat{\mu}_{li}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum innerhalb des nächsten Zeitschrittes von $\mathcal{J}_i$ nach $R_l$ gewandert ist $(i = 1,\ldots,p\ ;\ l = 1,\ldots,q)$.
Es ist $\sum_{i=1}^{p} \mu_{ij} \leq 1$ für alle $j = 1,\ldots,p$ und $\sum_{i=1}^{p} \mu_{ij} + \sum_{l=1}^{q} \hat{\mu}_{lj} = 1$ für alle j. Für mindestens ein (i,l) sei $\tilde{\mu}_{il} > 0$.




Es gilt $$U_i^{t+1} = U_i^t - \sum_{j=1}^{p} \mu_{ji} U_i^t + \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij} U_j^t - \sum_{l=1}^{q} \hat{\mu}_{li} U_i^t + \sum_{l=1}^{q} \tilde{\mu}_{il} \Psi_l$$

$$= (1 - \sum_{j=1}^{p} \mu_{ji} - \sum_{l=1}^{q} \hat{\mu}_{li}) U_i^t + \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij} U_j^t + \sum_{l=1}^{q} \mu_{il} \Psi_l .$$

Setzt man $T := (\mu_{ij})$ , $\tilde{T} := (\tilde{\mu}_{il})$ , i,j=1,...,p , l=1,...,q ,

und beachtet man, daß $1 - \sum_{j=1}^{p} \mu_{ji} - \sum_{l=1}^{q} \hat{\mu}_{li} = 0$ ist, so erhält man

$$U^{t+1} = T U^t + \tilde{T} \Psi \quad , \tag{1.13a}$$

und man fordert wieder

$$U^0 \geq 0 . \tag{1.13b}$$

Es ist $1_p^* T \leq 1_p^*$.

Für die Populationsdichten erhält man die folgende Rekursion

$$u_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{p} c_i' \mu_{ij} c_j u_j^t + \sum_{l=1}^{q} c_i' \tilde{\mu}_{il} \tilde{c}_l \Psi_l \quad . \tag{1.14}$$

Mit den entsprechenden Diagonalmatrizen definieren wir

$$M = (m_{ij}) := C' T C$$

und

$$\tilde{M} = (\tilde{m}_{il}) := C' \tilde{T} \tilde{C} \quad ,$$

so daß sich (1.14) folgendermaßen schreiben läßt:

$$\begin{aligned} u^{t+1} &= Mu^t + \tilde{M}\gamma \ , \\ u^o &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Setzt man $b := \tilde{M}\gamma$ , $0 \leq b \in \mathbb{R}^p$ , dann ist (1.15) gleichbedeutend mit $u^{t+1} = Mu^t + b$ . Es gilt $c^* \cdot M \leq c^*$.

Der Gleichgewichtsbedingung $\Phi \cdot c = c$ beim Neumann-Problem entspricht hier die Bedingung

$$T \cdot c + \tilde{T} \cdot \tilde{c} = c. \tag{1.16}$$

Daraus folgt für die Matrizen M und $\tilde{M}$

$$M1_p + \tilde{M}1_q = C^{-1} T c + C^{-1} \tilde{T} \tilde{c} = C^{-1} c \ ,$$

also

$$M1_p + \tilde{M}1_q = 1_p \ . \tag{1.17}$$

Wegen der formalen Analogie der Rekursionsgleichung (1.15) zur Anfangswertaufgabe bei parabolischen Differentialgleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen nennen wir (1.15) das Dirichlet-Problem. Es läßt sich auch als homogenes Anfangswertproblem im $R^{p+q}$ schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ \gamma \end{bmatrix}^{t+1} &= \begin{bmatrix} M & \tilde{M} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \gamma \end{bmatrix}^t \ , \\ \begin{bmatrix} u \\ \gamma \end{bmatrix}^o &= \begin{bmatrix} u^o \\ \gamma \end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Damit kann man (1.15) dem Problem der Iteration einer zeilenstochastischen Matrix (s.(1.8)) im $R^{p+q}$ subsumieren. Da aber die Schreibweise (1.15) des Dirichlet-Problems für unsere Betrachtungen übersichtlicher ist, werden wir im folgenden nur sie benutzen.

## 2. Abschätzungen für die Lösungen und Konvergenz gegen den stationären Zustand

### a) Das Neumann-Problem

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$u^{t+1} = Ku^t \qquad (1.8)$$

bzw. $$u^{t+1} = K^t u^o \quad , \quad u^o \geq 0$$

mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1; K habe die dort aufgeführten Eigenschaften.

Um eine erste Abschätzung für die durch (1.8) bestimmte Folge $(u^t)$ zu gewinnen, definieren wir für $x \in \mathbb{R}^p$, $z \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$ die Größen (vgl. F.L. Bauer)

$$m_1(x,z) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda z \leq x\} \ ,$$

$$m_2(x,z) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda z\} \ .$$

Ist $A \geq 0$ eine quadratische Matrix der Ordnung p, so folgt mit Bauer, Theorem 3 :

$$m_1(x,z) \leq m_1(Ax,Az) \leq m_2(Ax,Az) \leq m_2(x,z) \ .$$

Sei nun z ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\varrho > 0$; man erhält

$$m_1(x,z) \leq \frac{1}{\varrho} m_1(Ax,z) \leq \frac{1}{\varrho} m_2(Ax,z) \leq m_2(x,z) \ ,$$

und falls $\varrho = 1$ ist, so ergeben sich mit

$$m_1(Ax,z)z \leq Ax \leq m_2(x,z)z$$

die Ungleichungen

$$m_1(x,z)z \leq A^t x \leq m_2(x,z)z \quad \text{für alle } t = 0,1,\ldots \ .$$

Auf die Matrix K übertragen gewinnt man mit (1.12) die Abschätzung

$$\min_{1\le i\le p}\{u_i^o\}\cdot 1_p \le K^t u^o \le \max_{1\le i\le p}\{u_i^o\}\cdot 1_p \quad \text{für alle } t = 0,1,\dots \tag{2.1}$$

bzw. $$\min_{1\le i\le p}\{u_i^o\}\cdot 1_p \le u^t \le \max_{1\le i\le p}\{u_i^o\}\cdot 1_p \quad \text{für alle } t = 0,1,\dots \ .$$

(2.1) entspricht dem schwachen Maximum-Prinzip für parabolische Differentialgleichungen mit Neumann-Bedingungen.

In Abschnitt b) werden zwei weitere Maximum-Prinzipien bewiesen, die sofort auf die Lösungen von (1.8) übertragen werden können.

Um weitere Aussagen über das Verhalten der Folgen $(u^t)$ und $(K^t)$ wie z.B. über die Anzahl der Eigenvektoren von K zum Eigenwert 1 (i.e. stationäre Lösungen von (1.8)) und die Konvergenz dieser Folgen beweisen zu können, benötigen wir einige zusätzliche Voraussetzungen. Dazu

Definition 1 (Schaefer [2], I 6.1)

Eine quadratische Matrix $A \geq 0$ der Ordnung p heißt irreduzibel, wenn es keine Permutationsmatrix P gibt, so daß gilt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix} , \tag{2.2}$$

$A_i$ quadratisch der Ordnung $\nu_i$, $0 < \nu_i < p$.

Auf unser Modell übertragen entspricht die Ähnlichkeitstransformation von K mittels einer Permutationsmatrix einer Umnumerierung der Inseln. Eine anschauliche Interpretation der Irreduzibilität einer Matrix ermöglicht

Lemma 1 (Young, S.38, 5.2)

A ist genau dann irreduzibel, wenn der Graph G(A) in dem Sinne zusammenhängend ist, daß es für jedes Knotenpaar $(P_i,P_j)$ in G(A) einen gerichteten Weg von $P_i$ nach $P_j$ gibt.

Den Knotenpaaren $(P_i, P_j)$ entsprechen in unserem Modell Paare von Inseln $(\mathfrak{J}_i, \mathfrak{J}_j)$. Irreduzibilität der Matrix K bedeutet dann, daß ein Individuum von jeder Insel $\mathfrak{J}_i$ zu jeder Insel $\mathfrak{J}_j$ gelangen kann - wenn auch eventuell mit dem Umweg über andere Inseln, da nicht vorausgesetzt wird, daß $\mu_{ij} > 0$ für alle i,j ist.

Vollpositive Matrizen $K = (k_{ij})$ (d.h. $k_{ij} > 0$ für alle i,j - bezeichnet mit $K > 0$ ) sind immer irreduzibel.

Es gilt der folgende

Satz 1 Ist K irreduzibel und $r = r(K)$ der Spektralradius von K, so folgt

i) $r = r(K) = 1$ ist einfacher Eigenwert von K,

ii) $r = 1$ ist einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Bis auf skalare Faktoren gibt es genau einen positiven Eigenvektor; dieser ist strikt positiv und gehört zum Eigenwert 1.

Beweis: s. Schaefer [2], I 6.2, 6.3 .

$\mathbf{1}_p$ ist demnach bis auf einen konstanten Faktor die einzige stationäre Lösung von (1.8), wenn man voraussetzt, daß K irreduzibel ist.

Um die Konvergenz der Folge $(K^t)$ zu garantieren, muß K noch eine zusätzliche Eigenschaft besitzen:

Definition 2 (Schaefer [2], I 7.1 )

Eine irreduzible Matrix $A \geq 0$ der Ordnung $n \geq 2$ heißt primitiv , wenn $r = r(A)$ der einzige Eigenwert von A mit Betrag r ist.

Antwort auf die Frage nach der Konvergenz von $(K^t)$ gibt jetzt

Satz 2 Ist K irreduzibel, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) K ist primitiv.

ii) $\lim_{t\to\infty} K^t$ existiert.

iii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K^n > 0$ .

iv) $K^t$ ist irreduzibel für alle $t \geq 1$.

Beweis: s. Schaefer [2], I 7.3 .

Satz 3 Ist $K = (k_{ij})$ irreduzibel und $k_{ii} > 0$ für mindestens ein i , so ist K primitiv.

Beweis: s. Schaefer [2], Korollare 1 und 2 zu I 6.5 .

Satz 3 liefert ein Kriterium, das uns die Interpretation des Begriffs der Primitivität einer Matrix innerhalb unseres Modells erlaubt: Die Zeitschritte müssen so klein gewählt sein, daß nicht von jeder Insel alle Individuen während eines Zeitschrittes fortwandern können. Unter dieser Bedingung konvergiert die Folge der Dichten $(u^t)$ gegen eine stationäre Verteilung $u_s$ . Wegen $c^* u^t = \tilde{U}$ für alle t gilt auch für diese Grenzverteilung $c^* u_s = \tilde{U}$ , also

$$\lim_{t\to\infty} u^t = \tilde{u} \mathbf{1}_p \quad . \tag{2.3}$$

Es ist $\tilde{u} > 0$ genau dann, wenn $u^o \neq 0$ .

Für die Rekursion $U^{t+1} = \Phi U^t$ folgt aus $K = C^{-1} \Phi C$

$$\lim_{t\to\infty} U^t = \frac{\tilde{U}}{e} c \, .$$

Ist die Matrix K reduzibel, so läßt sie sich nach (2.3) in Blöcke aufspalten, für die man jeweils die Frage nach der Existenz stationärer Lösungen und die nach der Konvergenz stellen kann. Man erhält so entsprechende Ergebnisse wie oben für jeden einzelnen Block.

Matrizen $\Phi'$ bzw. K', die alle an $\Phi$ bzw. K gestellten Forderungen bis auf (1.11) bzw. (1.12) erfüllen, besitzen ebenfalls genau einen strikt positiven Eigenvektor $u'_s$, gegen den die entsprechende Folge $(u'^t)$ unter den obigen Bedingungen konvergiert. Diese Grenzverteilung ist jedoch räumlich nicht homogen.

b) Das Dirichlet-Problem

Es sei nun die Anfangswertaufgabe

$$u^{t+1} = Mu^t + \tilde{M}\gamma = Mu^t + b \quad , \qquad u^o \geq 0 \tag{1.15}$$

mit den Bezeichnungen von 1b) gegeben, M und $\tilde{M}$ mit den dort geforderten Eigenschaften.

Das folgende Lemma entspricht dem schwachen Maximum-Prinzip auf dem Analogon des parabolischen Randes für die Diffusionsgleichung mit Dirichlet-Bedingungen.

Lemma 2 Es sei $\underline{a} := \min_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \{u_i^o, \gamma_j\}$, $\bar{a} := \max_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} \{u_i^o, \gamma_j\}$.

Dann ist

$$\underline{a}\mathbf{1}_p \leq u^t \leq \bar{a}\mathbf{1}_p$$

für alle $t = 0,1,\ldots$ .

Beweis: Es gilt $u^1 = Mu^o + \tilde{M}\gamma$, also mit (1.17)

$$u^1 \geq \underline{a}M\mathbf{1}_p + \underline{a}\tilde{M}\mathbf{1}_q = \underline{a}\mathbf{1}_p \quad .$$

Die Behauptung ergibt sich mit vollständiger Induktion ( $u^t \leq \bar{a}\mathbf{1}_p$ analog). □

Wir beweisen nun zwei unterschiedlich starke Maximum - Prinzipien für die Lösungen des Problems (1.15).

Satz 4 $\underline{a}$ und $\bar{a}$ seien definiert wie in Lemma 2. M erfülle folgende Voraussetzung: Für jedes j gebe es mindestens ein i (i,j=1,...,p) mit $m_{ij} > 0$ (d.h.M habe keine Nullspalte).
Dann gilt: Ist $u^t = \underline{a}\mathbb{1}_p$ ($u^t = \bar{a}\mathbb{1}_p$) für ein $t > 0$, so folgt $u^\tau = \underline{a}\mathbb{1}_p$ ($u^\tau = \bar{a}\mathbb{1}_p$) für alle $\tau \geq 0$.

Beweis: Angenommem, es ist $u_\nu^\tau > \underline{a}$ für ein $\tau$, $0 \leq \tau < t$, und ein $\nu$, $1 \leq \nu \leq p$, dann ist für mindestens ein i

$$u_i^{\tau+1} = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} u_j^\tau + \sum_{l=1}^{q} \tilde{m}_{il} \gamma_l \overset{(*)}{>} \underline{a} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} + \underline{a} \sum_{l=1}^{q} \tilde{m}_{il} = \underline{a}. \quad (2.4)$$

Würde die Ungleichung (*) in (2.4) für kein i gelten, so müßte wegen $u_\nu^\tau > \underline{a}$ $m_{i\nu} = 0$ sein für alle $\nu$ : Widerspruch zur Voraussetzung.
Aus $u_\nu^\tau > \underline{a}$ für mindestens ein $\nu$, $0 \leq \tau < t$, ergibt sich somit $u_i^{\tau+1} > \underline{a}$ für mindestens ein i. Nach endlich vielen Schritten erhält man $u_j^t > \underline{a}$ für mindestens ein j, $1 \leq j \leq p$: Widerspruch zu $u^t = \underline{a}\mathbb{1}_p$.
Aus $u^1 = Mu^0 + b = \underline{a}\mathbb{1}_p$, $u^0 = \underline{a}\mathbb{1}_p$ und (1.17) ergibt sich $b = \underline{a}\tilde{M}\mathbb{1}_q$ und damit auch $u^\tau = \underline{a}\mathbb{1}_p$ für alle $\tau > t$.
Den zweiten Teil der Behauptung beweist man analog. □

Anmerkung 1 Hat M eine Nullspalte, dann kann man durch Umnumerierung erreichen, daß dies die letzte Spalte ist. Das impliziert die Reduzibilität von M (s. Def. 1). Für irreduzible Matrizen M ist also die Voraussetzung von Satz 4 a forteriori erfüllt.

Satz 5 $\underline{a}$ und $\bar{a}$ seien definiert wie in Lemma 2. M sei primitiv. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt: Falls $u_r^t = \underline{a}$ ($u_r^t = \bar{a}$) ist für ein $t \geq n$ und ein r, $1 \leq r \leq p$, so folgt $u^\tau = \underline{a}\mathbb{1}_p$ ($u^\tau = \bar{a}\mathbb{1}_p$) für alle $\tau \geq 0$.

Beweis: Nach Satz 2 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $M^n > 0$ ist; $M^t$ ist irreduzibel für alle $t \geq 1$. Man geht nun vor wie im Beweis von Satz 4. Nimmt man $u_\nu^\tau > \underline{a}$ an für ein $\tau \geq n$, dann gilt wegen $M^n > 0$ die Ungleichung (2.4) für jedes i: Widerspruch. Ist $\tau < n$, so kann man wegen der Irreduzibilität aller $M^t$ den Schluß aus dem Beweis von Satz 4 wiederholen bis zum Zeitpunkt $\tau_o = n$. Dort gilt dann wieder das für $\tau \geq n$ Gesagte. □

Anmerkung 2 Für $M > 0$ ist Satz 5 bereits für $n \geq 1$ gültig. Damit entspricht Satz 5 für vollpositive Matrizen M dem starken Maximum-Prinzip bei parabolischen Differentialgleichungen. Ersetzt man M durch K und fordert $\gamma = 0$, so lassen sich die Sätze 4 und 5 sofort auf das Neumann- Problem (1.8) übertragen.

Es stellt sich die Frage nach der Existenz stationärer Lösungen des Problems (1.15), d.h. nach Lösungen der Gleichung

$$u_s = Mu_s + b.$$

Mit Hilfe der beiden folgenden Lemmata können wir diese Frage und gleichzeitig die nach der Konvergenz der Folge $(u^t)$ gegen $u_s$ beantworten.

Lemma 3 (Krasnoselskij [3], S.17 )
Der Spektralradius der Matrix A genüge der Ungleichung $r(A) < 1$. Dann konvergiert die durch $v^{t+1} = Av^t + w$ gegebene Iteration gegen die Lösung der Gleichung $v_s = Av_s + w$ ; es ist $v_s = (I - A)^{-1} w$.

Lemma 4 (Varga, S.21, Korollar zu Theorem 1.7)
Sei $A = (a_{ij})$ eine irreduzible $p \times p$-Matrix, und seien $x_1, \ldots, x_p$ beliebige positive Zahlen. Wenn

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| x_j}{x_i} \leq \rho$$

ist, wobei die strikte Ungleichung für mindestens ein i erfüllt ist, dann ist $r(A) < \rho$.

Wir haben damit

Satz 6 Sei M irreduzibel. Dann ist $r(M) < 1$, und (1.15) hat genau eine stationäre Lösung $u_s = (I - M)^{-1} b$. Für jedes beliebige Anfangsdatum $u^0 \geq 0$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} u^t = u_s .$$

Ist M primitiv und $b = \tilde{M} \psi \neq 0$, so ist $u_s > 0$.

Beweis: Es ist $|m_{ij}| = m_{ij}$. Nach Voraussetzung (s. 1b)) ist mindestens ein $\tilde{m}_{il} > 0$. Daraus folgt wegen $M \mathbf{1}_p + \tilde{M} \mathbf{1}_q = \mathbf{1}_p$ für dieses i

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1 - \sum_{l=1}^{q} \tilde{m}_{il} < 1 .$$

Wir setzen nun in Lemma 4 $x_i := 1$, $i=1,\ldots,p$. M erfüllt demnach die Bedingung von Lemma 4 mit $\rho = 1$; also ist $r(M) < 1$.

Weiter gilt

$$u_s = \sum_{t=0}^{\infty} M^t b ,$$

woraus sich der letzte Teil der Behauptung ergibt. □

## 3. Interaktion zwischen Migration und Reproduktion

### a) Reine Reproduktion

Wir betrachten einen Biotop, der einer der Inseln entspricht. Sieht man von Migration ab, so soll sich die Population dort gemäß einem Reproduktionsgesetz vermehren. Im Falle diskreter Zeit läßt sich dann die Entwicklung der Population (charakterisiert durch ihre Dichte $u \in \mathbb{R}_+$) durch eine Differenzengleichung

$$\begin{aligned} u^{t+1} &= g(u^t) \ , \ t = 1,2,\ldots \\ u^0 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

beschreiben, wobei $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Wir wollen hier gleich den Fall betrachten, daß mehrere interagierende Populationen den Biotop bewohnen. Dann ist $u \in \mathbb{R}_+^n$ ein Vektor und $g: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ eine vektorwertige Abbildung. Die Fixpunkte $u_s$ von $g$, also Lösungen der Gleichung $g(u) = u$, entsprechen stationären Zuständen. Deren lokale Stabilität wird i.a. durch den Spektralradius $r(g'(u_s))$ bestimmt: Man erhält Stabilität für $r(g'(u_s)) < 1$, Instabilität für $r(g'(u_s)) > 1$.

Im Gegensatz zu der entsprechenden Differentialgleichung kann hier der skalare Fall schon sehr kompliziert werden. Ein Standardbeispiel ist

$$g(u) = \begin{cases} au(1-u) & \text{für } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{für } u \geq 1 \ . \end{cases}$$

Für geeignete Parameter $a \geq 0$ kann (3.1) mit diesem $g$ Lösungen beliebiger Periode haben (Li/Yorke).

Definition 3 Die stetige Funktion $V: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ heiße Lyapunov-Funktion zu (3.1), falls

$$V(g(u)) \leq V(u) \quad , \tag{3.2a}$$

$$V(g(u)) = V(u) \implies g(u) = u \quad , \tag{3.2b}$$

$$V(u) \to +\infty \quad , \text{ falls } |u| \to +\infty \; . \tag{3.2c}$$

Satz 7 Es gebe eine Lyapunov-Funktion V zu (3.1). Dann approximiert jede Lösung $(u^t)$ der Differenzengleichung (3.1) ein Kontinuum von stationären Punkten.

Beweis: Sei $(u^t)$ eine Lösung von (3.1), und sei $(v^t)$ eine Folge, die gemäß $v^t = V(u^t)$ dieser Lösung zugeordnet ist. Dann konvergiert $(v^t)$ monoton gegen ein $\bar{v} \geq 0$. Aus (3.2c) folgt, daß $(u^t)$ relativ kompakt ist. Sei $\bar{u}$ ein Häufungspunkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(u^{t'})$ von $(u^t)$ mit $u^{t'} \to \bar{u}$. Die Funktion $u \mapsto V(g(u)) - V(u)$ ist stetig, also gilt $V(g(u^{t'})) - V(u^{t'}) \to V(g(\bar{u})) - V(\bar{u})$. Aus $V(u^{t'+1}) - V(u^{t'}) \to 0$ erhält man: $\bar{u}$ ist stationärer Punkt.

Angenommen, die Limesmenge L von $(u^t)$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei disjunkte, kompakte Mengen $C_1$, $C_2 \neq \emptyset$ mit $C_1 \cup C_2 = L$. Da $g(u) - u$ auf L verschwindet, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|g(u) - u| < \varepsilon$ ist für u aus einer $\delta$-Umgebung von L. Sei $d := \operatorname{dist}(C_1, C_2)$, $\varepsilon < \frac{d}{2}$, $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. $t_o$ sei so gewählt, daß $\operatorname{dist}((u^t), L) < \delta$ für $t \geq t_o$. Angenommen, es ist $\operatorname{dist}(u^t, C_1) < \delta$, $\operatorname{dist}(u^{t+1}, C_2) < \delta$, dann folgt

$$\frac{d}{2} < d - 2\delta \leq |u^{t+1} - u^t| < \varepsilon < \frac{d}{2} \; .$$

Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß L zusammenhängend ist. □

Zur Erläuterung führen wir den folgenden, im übrigen trivialen Fall an:

Lemma 5 Es sei $g$ monoton wachsend, und es gebe $u_1$, $u_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(u) > u$ für $u < u_1$ und $g(u) < u$ für $u > u_2$. Dann ist

$$V(u) = \int_0^u (s - g(s))ds$$

eine Lyapunov-Funktion zu (3.1), falls $s - g(s)$ nicht integrabel ist.

Beweis: Es ist

$$V(g(u)) - V(u) = \int_u^{g(u)} (s - g(s))ds \leq 0,$$

denn es gilt:

i) Sei $g(u) > u$. Da $g$ nichtfallend ist, hat man $g(s) \geq g(u) > s$ für $u < s < g(u)$; also ist der Integrand negativ in $(u, g(u))$ und damit $V(g(u)) - g(u) < 0$.

ii) Sei $g(u) < u$. Wie in i) folgt $V(g(u)) - g(u) < 0$.

Aus $V(g(u)) = V(u)$ ergibt sich $\int_u^{g(u)} (s - g(s))ds = 0$.

Nimmt man an, daß $g(u) > u$ oder $g(u) < u$ gilt, so erhält man wie in i) einen Widerspruch.

Da aus den Voraussetzungen weiter folgt, daß $V$ die Bedingung (3.2c) erfüllt, ist die Behauptung bewiesen. □

Natürlich konvergiert in $\mathbb{R}$ unter der Monotonievoraussetzung an $g$ jede Lösung von (3.1) gegen einen stationären Zustand oder gegen $\infty$.

Beispiel 1 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibe ein logistisches Reproduktionsgesetz:

$$\begin{aligned} &g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \\ &g'(0) > 1, \; g'(u) \geq 0 \text{ für alle } u \geq 0, \\ &g(u) > u \quad \text{für } 0 < u < 1, \\ &g(u) < u \quad \text{für } u > 1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

und $s - g(s)$ sei nicht integrabel. (3.3a)

Dann erfüllt $g$ die Voraussetzungen von Lemma 5, und für die Lösungen $(u^t)$ von (3.1) gilt: Für beliebige Anfangsdaten $u^0 \geq 0$ ist

$$\lim_{t \to \infty} u^t = 1.$$

Denn sei $u^0 < 1$. Dann ist $u^1 = g(u^0) \leq 1$ wegen

$$1 - u^1 = g(1) - g(0) = g'(w)(1 - u^0) \geq 0$$

für ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $u^0 \leq w \leq 1$. Mit vollständiger Induktion erhält man $u^t \leq 1$ für alle $t$ und $u^0 < u^1 \leq u^2 \leq \ldots \leq 1$. Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie gegen ein $u_s$ mit $u_s = g(u_s)$. Der Beweis für den Fall $u^0 > 1$ verläuft analog, der Fall $u^0 = 1$ ist trivial. Angenommen, es ist $u_s < 1$ $(u_s > 1)$, dann folgt aus (3.3) $g(u_s) > u_s$ $(g(u_s) < u_s)$: Widerspruch zu $u_s = g(u_s)$. □

Beispiel 2 Das klassische Selektionsmodell von Fisher-Wright-Haldane für den Fall getrennter Generationen (vgl. Hadeler [1], [3]) läßt sich in den Rahmen von (3.1) einordnen, wenn man die auftretenden Größen folgendermaßen interpretiert: Gegeben sei eine diploide Population, deren Individuen genetisch identisch sind bis auf einen einzigen autosomalen Locus mit zwei Allelen A und a. Die Fitnesskoeffizienten $\sigma, \varrho, \tau > 0$ der Genotypen AA, Aa und aa gehen als Parameter in das Modell ein. Der Zustand der Population ist gegeben durch die Frequenz $u \in [0,1]$ des Allels A. Die Entwicklung der Population in aufeinanderfolgenden Generationen wird beschrieben durch die Differenzengleichung (3.1), wobei die Funktion $g: [0,1] \to [0,1]$ gegeben ist durch

$$g(u) = \frac{\sigma u^2 + \varrho u(1-u)}{\sigma u^2 + 2\varrho u(1-u) + \tau(1-u)^2} \quad .$$

Weiter gilt

$$g'(u) = \frac{\sigma\varrho u^2 + 2\sigma\tau u(1-u) + \varrho\tau(1-u)^2}{\phi^2(u)}$$

mit $\phi(u) = \sigma u^2 + 2\varrho u(1-u) + \tau(1-u)^2$

(s. dazu Hadeler [3]). Es ist also $g'(u) \geq 0$. Setzt man $g$ nach $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ durch 0 bzw. durch 1 stetig fort, so erfüllt $g$ die Voraussetzungen von Lemma 5 und für $\varrho > 1$ auch die Bedingungen (3.3).

b) Das Neumann-Problem

Es werde eine Population mit n Spezies auf p Inseln betrachtet. Der Zustand der Population, charakterisiert durch die jeweiligen Dichten, wird durch eine p x n-Matrix beschrieben:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ u_{p1} & u_{p2} & \cdots & u_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\cdot} \\ u_{2\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{p\cdot} \end{bmatrix} = [u_{\cdot 1}, u_{\cdot 2}, \ldots, u_{\cdot n}].$$

Darin gibt der Zeilenindex die Insel und der Spaltenindex die Spezies an.

Setzt man voraus, daß auf jede Reproduktionsphase eine Migrationsphase folgt, so ergibt sich im Falle der Neumann-Bedingung die Gleichung

$$u^{t+1} = Kg(u^t) \quad , \qquad u^0 \geq 0, \tag{3.4}$$

worin der nichtlineare Operator $g$ auf die Zeilen wirkt und K als linearer Operator auf die Spalten.

Wir zeigen

Satz 8 Sei V eine strikt konvexe Lyapunov-Funktion zu (3.1) und sei $k_{ii} > 0$ für $i = 1,\ldots,p$ , K aber möglicherweise reduzibel. Dann ist V,

gegeben durch

$$\mathfrak{V}(u) = \sum_{j=1}^{p} c_j V(u_{j\cdot})$$

($c_j$ ist die Größe der Insel $\mathfrak{I}_j$) eine Lyapunov-Funktion zu (3.4).

Beweis: Der Beweis wird durchsichtiger, wenn man ihn komponentenweise aufschreibt. Es ist

$$g(u) = \begin{bmatrix} g_1(u_{11},\dots,u_{1n}) & \cdots & g_n(u_{11},\dots,u_{1n}) \\ \vdots & & \\ g_1(u_{p1},\dots,u_{pn}) & \cdots & g_n(u_{p1},\dots,u_{pn}) \end{bmatrix} ,$$

$$(Kg(u))_{ij} = \sum_{l=1}^{p} k_{il} g_j(u_{l1},\dots,u_{ln}) ,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}(Kg(u)) &= \sum_{i=1}^{p} c_i V\Big(\sum_{l=1}^{p} k_{il} g_1(u_{l1},\dots,u_{ln}),\dots,\sum_{l=1}^{p} k_{il} g_n(u_{l1},\dots,u_{ln})\Big) \\ &\le \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} c_i k_{il} V(g_1(u_{l1},\dots,u_{ln}),\dots,g_n(u_{l1},\dots,u_{ln})) \\ &= \sum_{l=1}^{p} c_l V(g_1(u_{l1},\dots,u_{ln}),\dots,g_n(u_{l1},\dots,u_{ln})) \\ &\le \sum_{l=1}^{p} c_l V(u_{l1},\dots,u_{ln}) \qquad (3.5) \\ &= \mathfrak{V}(u) . \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung in (3.5) folgt aus $\sum_{l=1}^{p} k_{il} = 1$ für alle i, $K \geq 0$ und der Konvexität von V; die Gleichung ergibt sich mit (1.9) und die zweite Ungleichung aus der Tatsache, daß V auf jeder Insel eine Lyapunov-Funktion ist.

Gleichheit tritt ein, falls

$$g(u_{l\cdot}) = u_{l\cdot} \quad , \quad l = 1,\dots,n ,$$

und $$V\Big(\sum_{l=1}^{p} k_{il} u_{l1},\dots,\sum_{l=1}^{p} k_{il} u_{ln}\Big) = \sum_{l=1}^{p} k_{il} V(u_{l1},\dots,u_{ln}) ,$$

d.h. $$V\Big(\sum_{l=1}^{p} k_{il} u_{l\cdot}\Big) = \sum_{l=1}^{p} k_{il} V(u_{l\cdot}) \quad , \quad i = 1,\dots,p \quad ,$$

ist. Aus der strikten Konvexität folgt für jedes einzelne $i = 1,\dots,p$, daß in der letzten Gleichung auf beiden Seiten nur gleiche $u_{l\cdot}$ auftreten können. Zu jedem i gibt es also ein $u_{l_i}$, so daß

$$\sum_{l=1}^{p} k_{il} u_{l\cdot} = \sum_{\nu} k_{ij_\nu} u_{j_\nu \cdot} = \sum_{\nu} k_{ij_\nu} u_{l_i \cdot} = u_{l_i \cdot} \, .$$

Dabei wird nur über gewisse $k_{ij_\nu}$ (die $j_\nu$ hängen von i ab) summiert, die anderen Koeffizienten von $k_{i\cdot}$ verschwinden. Es kann mehr als ein Term auftreten, aber diese $u_{j_\nu}$ sind untereinander gleich. Da $\sum_{\nu} k_{ij_\nu} = 1$ ist, sind dies alle von 0 verschiedenen Elemente in einer Zeile von K. Aus $k_{ii} > 0$ erhält man nun $u_{l_i \cdot} = u_{i\cdot}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Offenbar benötigt man für den Beweis der Ungleichung (3.5) nur die schwache Konvexität von V. Aus der strikten Konvexität von V ergibt sich sofort die Eindeutigkeit des Minimums von V, dessen Existenz aus der Bedingung (3.2c) folgt.

Nach dieser kurzen Betrachtung einer Population, die aus n Spezies besteht, wenden wir uns für die folgenden Untersuchungen wieder einer Population zu, wie sie in den Abschnitten 1 und 2 beschrieben wurde. Dabei sei nun auf jeder Insel $\mathcal{J}_i$ ein logistisches Gesetz der Form (3.1), (3.3) gegeben, wobei $g = g_i$, $i=1,\dots,p$, von Insel zu Insel verschieden sein kann. Nimmt man wieder an, daß auf eine Reproduktionsphase eine Migrationsphase folgt u.s.f., dann wird die Entwicklung der Population auf $\mathcal{J}_i$ beschrieben durch

$$u_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{p} k_{ij} g_j(u_j^t) \quad , \quad u_i^o \geq 0. \tag{3.6}$$

$K = (k_{ij})$ ist die Matrix des Neumann-Problems (1.8).

Setzt man $u^t := (u_1^t,\dots,u_p^t)^*$ und $g(u^t) := (g_1(u_1^t),\dots,g_p(u_p^t))^*$, so läßt sich (3.6) schreiben als

$$u^{t+1} = Kg(u^t) \quad , \quad u^o \geq 0. \tag{3.7}$$

Wegen der besonderen Form der Abbildung $g: \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+^p$ gilt eine Art Mittelwertsatz. Dazu definiert man $w := (w_1,\dots,w_p)^*$ und $G'(w) := \operatorname{diag}(g_1'(w_1),\dots,g_p'(w_p))$. Nach (3.3) ist $G'(w) \geq 0$ für alle $w \geq 0$. Dann ist für $u^t \geq u^{t-1}$

$$u^{t+1} - u^t = KG'(w)(u^t - u^{t-1}) \tag{3.8}$$

für ein $w \in \mathbb{R}_+^p$ mit $u^{t-1} \leq w \leq u^t$.

Lemma 6 Für die durch (3.7) definierte Folge $(u^t)$ erhält man mit $\underline{\alpha} := \min\limits_{1\leq i\leq p}\{u_i^o, 1\}$ , $\overline{\alpha} := \max\limits_{1\leq i\leq p}\{u_i^o, 1\}$ die Abschätzung

$$\underline{\alpha} 1_p \leq u^t \leq \overline{\alpha} 1_p \tag{3.9}$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis: Es ist $\underline{\alpha} 1_p \leq u^o \leq \overline{\alpha} 1_p$ und $\underline{\alpha} 1_p \leq 1_p \leq \overline{\alpha} 1_p$ . (3.10)
Wegen der Monotonie von $g$ hat man $g(\underline{\alpha} 1_p) \leq g(u^o) \leq g(\overline{\alpha} 1_p)$ , und mit (3.3) und (3.10) ergibt sich

$$\underline{\alpha} 1_p \leq g(\underline{\alpha} 1_p) \leq g(u^o) \leq g(\overline{\alpha} 1_p) \leq \overline{\alpha} 1_p .$$

Aus $K1_p = 1_p$ folgt $\underline{\alpha} 1_p \leq u^1 \leq \overline{\alpha} 1_p$.
Den Rest beweist man mit vollständiger Induktion. □

Zwei weitere Maximum-Prinzipien für $(u^t)$ werden in Abschnitt b) bewiesen.

Lemma 7 $K$ sei primitiv, $u^o \geq 0$, $u^o \neq 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ , $n = n(u^o)$, mit $u^t > 0$ für alle $t \geq n$ .

Beweis: Es sei

$$\lambda := \inf \left\{ \frac{g_i(v)}{v} : 0 < v \leq \overline{\beta},\ 1 \leq i \leq n \right\} .$$

Wegen $g_i'(0) > 0$ und $\overline{\beta} \geq 1$ gilt $0 < \lambda \leq 1$, und es ist $g(u^t) \geq \lambda u^t$ für alle $t = 0,1,\ldots$ . Man erhält $u^t \geq \lambda^t K^t u^o$. Aus der Primitivität von K und Satz 2 folgt die Behauptung. □

Satz 9 Ist K primitiv, $u^o \geq 0$, $u^o \neq 0$, und erfüllt jede Komponente $g_i$ von g die Bedingungen (3.3), so gilt für die durch (3.7) definierte Folge $(u^t)$

$$\lim_{t \to \infty} u^t = \mathbb{1}_p .$$

Beweis: Mit (3.9) hat man

$$u^o \leq \mathbb{1}_p \Rightarrow u^t \leq \mathbb{1}_p \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{3.11}$$

Sei $\underline{u}^o$ ein 'konstanter' Vektor ($\underline{u}^o = d\mathbb{1}_p$ , $d \in \mathbb{R}$) mit $0 < d \leq 1$. Dann ist

$$\underline{u}^{t+1} \geq \underline{u}^t \quad \text{für alle } t \geq 0 , \tag{3.12}$$

denn es gilt

$$\underline{u}^1 = Kg(\underline{u}^o) \geq K\underline{u}^o = \underline{u}^o .$$

(3.12) ergibt sich mit vollständiger Induktion wegen

$$\underline{u}^{t+1} - \underline{u}^t = KG'(w)(\underline{u}^t - \underline{u}^{t-1})$$

für ein $w \in \mathbb{R}_+^p$ mit $\underline{u}^{t-1} \leq w \leq \underline{u}^t$ .

Ebenso folgt aus (3.9)

$$u^o \geq \mathbb{1}_p \Rightarrow u^t \geq \mathbb{1}_p \quad \text{für alle } t \geq 0 . \tag{3.13}$$

Sei $\overline{u}^0$ ein konstanter Vektor mit $\overline{u}^0 \geq \mathbb{1}_p$. Wie oben kann man zeigen, daß dann

$$\overline{u}^{t+1} \leq \overline{u}^t \quad \text{für alle } t \geq 0 \tag{3.14}$$

ist. Nach Lemma 7 kann man annehmen, daß $u^0 > 0$ ist. $\underline{u}^0$ und $\overline{u}^0$ seien nun so gewählt, daß $\underline{u}^0 \leq u^0 \leq \overline{u}^0$, $\underline{u}^0 \leq \mathbb{1}_p \leq \overline{u}^0$ gilt. Wegen der Monotonie der Abbildung $K \circ g$ hat man

$$\underline{u}^t \leq u^t \leq \overline{u}^t \quad \text{für alle } t \geq 0 \,. \tag{3.15}$$

(3.11) - (3.14) garantieren die Konvergenz der Folgen $(\underline{u}^t)$ und $(\overline{u}^t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}^t = \underline{\underline{u}} \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \overline{u}^t = \overline{\overline{u}} \quad ,$$

und $\underline{\underline{u}}$, $\overline{\overline{u}}$ sind stationäre Lösungen von (3.7).

Zu zeigen bleibt $\underline{\underline{u}} = \mathbb{1}_p = \overline{\overline{u}}$ .

Angenommen, es ist $\underline{\underline{u}} \neq \mathbb{1}_p$, dann gibt es mindestens ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\underline{\underline{u}}_l < 1$ und $g_l(\underline{\underline{u}}_l) > \underline{\underline{u}}_l$ . Weiter folgt

$$\mathbb{1}_p - \underline{\underline{u}} = K(\mathbb{1}_p - g(\underline{\underline{u}})) \lneqq K(\mathbb{1}_p - \underline{\underline{u}}) \,. \tag{3.16}$$

Um die letzte Ungleichung in (3.16) zu beweisen, nehmen wir an, daß für alle $i=1,\ldots,p$ gilt

$$\sum_{j=1}^{p} k_{ij}(1 - g_j(\underline{\underline{u}}_j)) = \sum_{j=1}^{p} k_{ij}(1 - \underline{\underline{u}}) \,. \tag{3.17}$$

Wegen $g_l(\underline{\underline{u}}_l) > \underline{\underline{u}}_l$ müßte dann aber die l-te Spalte von K eine Nullspalte sein: Widerspruch zur Primitivität von K.

Aus $c^*K = c^*$ und (3.16) ergibt sich

$$c^*(\mathbb{1}_p - \underline{\underline{u}}) \lneqq c^*(\mathbb{1}_p - \underline{\underline{u}}) \,:$$

Widerspruch. Ebenso beweist man $\overline{\overline{u}} = \mathbb{1}_p$, woraus mit (3.15) die Behauptung folgt. □ .

c) Das Dirichlet-Problem

Betrachten wir nun das Problem

$$u^{t+1} = Mg(u^t) + b \quad , \quad u^o \geq 0 \quad . \tag{3.18}$$

Dabei seien $b = \tilde{M}\gamma$ , $M$ und $\tilde{M}$ definiert wie in Abschnitt 1b), und es sei $g: \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}_+^p$ gegeben durch $g(u^t) = (g_1(u_1^t),\ldots,g_p(u_p^t))^*$, wo jede Komponente $g_i$ von $g$ die Bedingungen (3.3) erfüllt.

$M$ sei irreduzibel; dann ist $r(M) < 1$ (Satz 6).

Mit $\overline{\lambda} = \max\limits_{1\leq i\leq p} \{u_i^o, 1\}$ und $M\mathbb{1}_p \leq \mathbb{1}_p$ erhält man eine erste obere Schranke für die Folge $(u^t)$ direkt aus (3.18):

$$u^t \leq \overline{\lambda}\mathbb{1}_p + \sum_{\tau=0}^{t-1} M^\tau b \quad \text{für alle } t \geq 0 \ .$$

Wegen $r(M) < 1$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\tau=0}^{t-1} M^\tau b$ für $t \to \infty$ gegen ein $\tilde{b} \in \mathbb{R}^p$; somit ist

$$u^t \leq \overline{\lambda}\mathbb{1}_p + \tilde{b} \quad \text{für alle } t \geq 0 \ .$$

Eine genauere Abschätzung liefert das folgende Lemma, das auch für reduzible Matrizen $M$ gültig ist.

Lemma 8 Sei $\underline{\alpha} := \min\limits_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq l\leq q}} \{u_i^o, \gamma_l, 1\}$ , $\overline{\alpha} := \max\limits_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq l\leq q}} \{u_i^o, \gamma_l, 1\}$ .

Dann gilt

$$\underline{\alpha}\mathbb{1}_p \leq u^t \leq \overline{\alpha}\mathbb{1}_p \quad \text{für alle } t \geq 0 \ . \tag{3.19}$$

Beweis: Es ist $\underline{\alpha}\mathbb{1}_p \leq \mathbb{1}_p \leq \overline{\alpha}\mathbb{1}_p$ , $\underline{\alpha}\mathbb{1}_p \leq u^o \leq \overline{\alpha}\mathbb{1}_p$, $\underline{\alpha}\mathbb{1}_q \leq \gamma \leq \overline{\alpha}\mathbb{1}_q$ .

Da $g$ monoton ist, folgt

$$\underline{\alpha}\mathbb{1}_p \leq g(\underline{\alpha}\mathbb{1}_p) \leq g(u^o) \leq g(\overline{\alpha}\mathbb{1}_p) = \overline{\alpha}\mathbb{1}_p \ . \tag{3.20}$$

Mit (3.20) ergibt sich

$$u^1 - \underline{\alpha}\mathbb{1}_p = M(g(u^o) - \underline{\alpha}\mathbb{1}_p) + \tilde{M}(\gamma - \underline{\alpha}\mathbb{1}_q) \geq 0 \ .$$

Den Rest beweist man mit vollständiger Induktion, den zweiten Teil der Behauptung analog. □

Verschwindet eine der Komponenten von $u^0$ oder $\gamma$, so erhält man aus (3.19) nur die triviale Abschätzung $u^t \geq 0$. Eine eventuell genauere untere Schranke läßt sich folgendermaßen finden: Es sei

$$\lambda := \inf \left\{ \frac{g_i(v)}{v} : 0 < v \leq \bar{\alpha},\ 1 \leq i \leq n \right\} .$$

Wegen $g_i'(0) > 0$ und $\bar{\alpha} \geq 1$ gilt $0 < \lambda \leq 1$, und es ist $g(u^t) \geq \lambda u^t$ für alle $t = 0,1,\ldots$ . Man erhält

$$u^t \geq \lambda^t M^t u^0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} (\lambda M)^\tau b \quad . \tag{3.21}$$

Wegen $r(\lambda M) = \lambda r(M) < 1$ existiert der Grenzwert der Reihe. Konvergiert $(u^t)$ gegen ein $u_s$, so ergibt sich mit (3.19) und (3.21)

$$\bar{b} := \sum_{\tau=0}^{\infty} (\lambda M)^\tau b \leq u_s \leq \bar{\alpha} \mathbb{1}_p .$$

Ist M primitiv und $b \neq 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^t > 0$ für alle $t \geq n$ - in diesem Falle ist auch $\bar{b} > 0$.

Im folgenden beweisen wir - analog zu Abschnitt 2b) - zwei Maximum-Prinzipien für die durch (3.18) gegebene Folge $(u^t)$.

Satz 10 Sei M irreduzibel und seien $\underline{\alpha}$ und $\bar{\alpha}$ definiert wie in Lemma 8.

i) Falls $\underline{\alpha} < 1$ ist, so gilt: $u^t \geq \underline{\alpha} \mathbb{1}_p$ für alle $t \geq 0$, und ist $u^t = \underline{\alpha} \mathbb{1}_p$ für ein $t > 0$, dann folgt $u^\tau = \underline{\alpha} \mathbb{1}_p$ für alle $\tau \geq 0$.

ii) Falls $\bar{\alpha} > 1$ ist, so gilt: $u^t \leq \bar{\alpha} \mathbb{1}_p$ für alle $t \geq 0$, und ist $u^t = \bar{\alpha} \mathbb{1}_p$ für ein $t > 0$, dann folgt $u^\tau = \bar{\alpha} \mathbb{1}_p$ für alle $\tau \geq 0$.

Beweis: Es genügt, i) zu beweisen.

$u^t \geq \underline{\alpha} \mathbb{1}_p$ folgt aus Lemma 8. Sei nun $u^t = \underline{\alpha} \mathbb{1}_p$ für ein $t > 0$. Wäre $u_\nu^\tau > \underline{\alpha}$ für ein $\nu$, $1 \leq \nu \leq p$, und ein $\tau$, $0 \leq \tau < t$, dann hätte man wegen (3.3) $g_\nu(u_\nu^\tau) \geq g_\nu(\underline{\alpha}) > \underline{\alpha}$ und damit wegen der Irreduzibilität von M für mindestens ein i, $1 \leq i \leq p$,

$$u_i^{\tau+1} = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} g_j(u_j^\tau) + \sum_{l=1}^{q} \tilde{m}_{il} \psi_l > \underline{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{p} m_{ij} + \sum_{l=1}^{q} \tilde{m}_{il}\right) = \underline{\alpha} .$$

Die Behauptung ergibt sich daraus wie in Satz 4. □

Analog zu Satz 5 und Satz 10 beweist man den folgenden

Satz 11 M sei primitiv, $\underline{\alpha}$ und $\bar{\alpha}$ seien definiert wie in Lemma 8. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

i) Ist $\underline{\alpha} < 1$ und $u_r^t = \underline{\alpha}$ für ein $t \geq n$ und ein r, $1 \leq r \leq p$, so ist $u^\tau = \underline{\alpha} 1_p$ für alle $\tau \geq 0$.

ii) Ist $\bar{\alpha} > 1$ und $u_r^t = \bar{\alpha}$ für ein $t \geq n$ und ein r, $1 \leq r \leq p$, so ist $u^\tau = \bar{\alpha} 1_p$ für alle $\tau \geq 0$.

Die auf den Beweis von Satz 5 folgende Anmerkung 2 läßt sich sinngemäß sofort auf den Fall der im vorliegenden Abschnitt untersuchten Probleme übertragen.

Im letzten Teil dieses Abschnittes beschäftigen wir uns mit dem Beweis eines Satzes, der unter bestimmten Bedingungen die Existenz einer eindeutigen stationären Lösung $u_s$ des Problems (3.18) und die Konvergenz der Folge $(u^t)$ gegen $u_s$ garantiert.
Die Existenz einer stationären Lösung ohne die Eindeutigkeitsforderung läßt sich auch unter schwächeren Bedingungen zeigen.
Hat die Abbildung $M \cdot g$ eine Lipschitz-Konstante kleiner als 1, so kann man sinngemäß Satz 6 anwenden.

Satz 12 Es sei $Tu^t := Mg(u^t) + b = Mg(u^t) + \tilde{M}\psi$, $u^o \geq 0$, $u^o \neq 0$. Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Abschnitt 1b) gelte: M ist primitiv und $\psi > 0$. Jede Komponente von g genüge den Bedingungen (3.3); außerdem sei für $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und jedes i, $1 \leq i \leq p$, die Funktion $\frac{1}{s} g_i(s)$ streng monoton fallend (man nennt g dann quasi-konkav).

Unter diesen Voraussetzungen besitzt T genau einen Fixpunkt $u_s$, und es gilt $\lim_{t\to\infty} u^t = u_s$.

Beweis: Zunächst beweisen wir zwei Aussagen über Funktion $g$:

Lemma 9 Unter den Voraussetzungen von Satz 12 gilt:

i) Zu jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^p$ existiert ein Vektor $v_x \in \mathbb{R}^p_+$ mit

$$g(v_x) \leq v_x + x \quad \text{und} \quad v_x + x > 0.$$

ii) Zu jedem $t_o \in (0,1)$ und jedem $v \in \mathbb{R}^p_+$, $v > 0$, gibt es ein $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(v,t_o) > 0$ mit

$$g(t_o v) \geq (1 + \tilde{\mu}) t_o g(v).$$

Beweis:

i) $\frac{1}{s} g_i(s)$ ist streng monoton fallend für jedes i, und es ist $g_i(1) = 1$. Also gibt es $\varepsilon > 0$ und $s_o \geq 1$, so daß für alle $s \geq s_o$ gilt

$$\frac{1}{s} g_i(s) \leq 1 - \varepsilon$$

bzw. $s(\frac{1}{s} g_i(s) - 1) \leq -\varepsilon s$ für alle i.

Die Behauptung folgt, wenn man $v_x \geq \max\left\{-\frac{1}{\varepsilon}x, s_o, -x\right\}$ wählt.

ii) Sei $t_o \in (0,1)$, $v > 0$. Es ist $t_o v < v$, d.h. für jede Komponente $g_i$ von $g$ gilt

$$\frac{g_i(v_i)}{v_i} < \frac{g_i(t_o v_i)}{t_o v_i} \quad ;$$

daraus erhält man $t_o g(v) < g(t_o v)$. Wähle

$$\tilde{\mu}(v,t_o) := \max_{1 \leq i \leq p} \left\{ g_i(t_o v_i) - t_o g_i(v_i) \right\} \quad . \; \square$$

In den nächsten beiden Lemmata konstruieren wir eine konvergente Minorante bzw. Majorante der Folge $(T^t u^o)$. Dazu benötigen wir die aus (3.21) folgende Aussage, daß wegen der Primitivität von M ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $u^n = T^n u^o > 0$. (3.22)

Lemma 10 Sei $\underline{u}$ ein konstanter Vektor mit $0 < \underline{u} < \mathbb{1}_p$ und $\underline{u} \leq \min_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq l\leq q}} \{u_i^n, \gamma_l\} \cdot \mathbb{1}_p$ (n wie in (3.22)). Außerdem gelte $G'(w)\mathbb{1}_p \geq \mathbb{1}_p$ für alle $w \in \mathbb{R}_+^p$ mit $0 \leq w \leq \underline{u}$.

Dann ist die Folge $(T^t\underline{u})$ für alle $t \geq n$ eine monoton steigende, nach oben beschränkte Minorante der Folge $(T^t u^o)$.

Beweis: Es ist $T\underline{u} = MG'(w)\underline{u} + b$ für ein w mit $0 \leq w \leq \underline{u}$, also $T\underline{u} \geq M\underline{u} + \tilde{M}\gamma \geq \underline{u}$. Aus der Monotonie von T und (3.19) ergibt sich

$$\underline{u} \leq T\underline{u} \leq T^2\underline{u} \leq \ldots \leq \max_{1\leq l\leq q} \{\gamma_l, 1\} \mathbb{1}_p$$

und

$$T^{t-n}\underline{u} \leq T^t u^o \quad \text{für alle } t \geq n.$$

Lemma 11 Sei $\tilde{b} := \max_{1\leq i\leq p} \{b_i\} \mathbb{1}_p$, und sei $\bar{u}$ ein konstanter Vektor mit $\bar{u} - \tilde{b} > 0$, $\bar{u} \geq \alpha \mathbb{1}_p$ und $g(\bar{u}) \leq \bar{u} - \tilde{b}$ (s. Lemma 9).

Dann ist $(T^t\bar{u})$ für alle $t \geq 0$ eine monoton fallende, nach unten beschränkte Majorante der Folge $(T^t u^o)$.

Beweis: Es gilt $T\bar{u} = Mg(\bar{u}) + b \leq M(\bar{u} - \tilde{b}) + b \leq \bar{u}$. Wegen der Monotonie von T und (3.19) erhält man

$$\bar{u} \geq T\bar{u} \geq T^2\bar{u} \geq \ldots \geq \min_{1\leq l\leq q} \{\gamma_l, 1\} \mathbb{1}_p$$

und

$$T^t\bar{u} \geq T^t u^o \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad \square$$

Mit Lemma 10 und 11 hat man

$$T^{t-n}\underline{u} \leq T^t u^o \leq T^t\bar{u} \quad \text{für alle } t \geq n. \tag{3.23}$$

$(T^t\underline{u})$ und $(T^t\bar{u})$ konvergieren gegen Lösungen der Gleichung

$$u_s = Mg(u_s) + b. \tag{3.24}$$

Kann man zeigen, daß (3.24) nur eine einzige Lösung $u_s \geq 0$ besitzt, so ist Satz 12 bewiesen. Dazu benötigen wir noch einige Hilfsmittel.

Definition 4 (Krasnoselskij [1], S.185 ff)

E sei ein Raum mit Kegel $\mathcal{K}$. Ein Operator $A: E \to E$ heißt $u_o$-konkav, wenn

i) es ein Element $u_o \in \mathcal{K}$, $u_o \neq 0 \in \mathcal{K}$, gibt, so daß für beliebiges $v \in \mathcal{K}$, $v \neq 0 \in \mathcal{K}$, die Ungleichungen

$$\alpha u_o \leq Av \leq \beta u_o \tag{3.25}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(v) > 0$, $\beta(v) > 0$ erfüllt sind,

ii) für jedes $v \in \mathcal{K}$ mit $\alpha_1(v)u_o \leq v \leq \beta_1(v)u_o$, $\alpha_1, \beta_1 > 0$, gilt: Zu jedem $t_o \in (0,1)$ existiert ein $\mu = \mu(v,t_o) > 0$ mit

$$A(t_o v) \geq (1 + \mu)t_o Av. \tag{3.26}$$

Satz 13 (Krasnoselskij [1], S.188)

Der Operator A sei $u_o$-konkav und monoton. Dann kann die Gleichung $Av = \lambda v$ für keinen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen in $\mathcal{K}$ haben.

Die Bedingung (3.25) wird zwar nicht von T, wegen der Primitivität der Matrix M aber von $T^n$ mit $u_o = \mathbb{1}_p$ erfüllt. Da jeder Fixpunkt von T auch Fixpunkt von $T^n$ ist, bleibt nur zu beweisen, daß $T^n$ der Bedingung (3.26) genügt. Dazu das abschließende

Lemma 12 $T^n$ ist $u_o$-konkav.

Beweis: Teil i) der Definition 4 ist bereits gezeigt.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^p$, $v > 0$, $t_o \in (0.1)$. Mit Lemma 9 ii) erhält man $T(t_o v) = Mg(t_o v) + b \geq (1 + \tilde{\mu})t_o Mg(v) + b$. Mit $\mu := \min\{\tilde{\mu}, \frac{1}{t_o} - 1\}$ gilt

$$T(t_o v) \geq (1 + \mu)t_o Mg(v) + (1 + \mu)t_o b = (1 + \mu)t_o Tv \quad .$$

Aus der Monotonie von T folgt wegen $\mu > 0$

$$T^2(t_o v) \geq T((1 + \mu)t_o Tv) \geq (1 + \mu)t_o T^2 v,$$

also

$$T^n(t_o v) \geq (1 + \mu)t_o T^n v \quad . \square$$

Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Anmerkung 4 Die Voraussetzung $\psi > 0$ ist zwar sehr einschränkend, aber ohne weitere Forderungen an $\tilde{M}$ (z.B. $\tilde{M} > 0$) nicht zu umgehen, da für beliebige $\psi \geq 0$, $\psi \neq 0$, $\tilde{M} \geq 0$, $\tilde{M} \neq 0$ gelten kann $b = \tilde{M}\psi = 0$.

## II. DIE BEZÜGLICH DES RAUMES KONTINUIERLICHEN, BEZÜGLICH DER ZEIT DISKRETEN MODELLE

### 1. Die Herleitung der Rekursionsgleichungen

#### a) Das Neumann-Problem

Der Biotop, der den Lebensraum der betrachteten Population bildet, bestehe jetzt aus einer kompakten, zusammenhängenden Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Es sei $X := C(\Omega)$, versehen mit der sup-Norm. Die "Größe" (bzw. Kapazität im Sinne von I.1) des Ortes $x \in \Omega$ sei $c(x) > 0$, $c \in C(\Omega)$, und es sei

$$\mathcal{C} := \int_{\Omega} c(x)dx \quad .$$

Die Populationsgröße bzw. -dichte am Ort x sei $U(x)$ bzw. $u(x) = \frac{U(x)}{c(x)}$. Die Population sei so groß, daß $U: \Omega \to \mathbb{R}_+$ als stetig angenommen werden kann.

Wir führen nun wieder eine diskrete Zeit $t = 0,1,\ldots$ ein und bezeichnen die Größe bzw. Dichte der Population in x zur Zeit t mit $U^t(x)$ bzw. $u^t(x)$. Die Gesamtgröße und die mittlere Dichte der Population zur Zeit t lassen sich beschreiben durch

$$\hat{U}^t := \int_{\Omega} U^t(x)dx$$

und $$\tilde{u}^t := \frac{U^t}{\mathcal{C}} \quad .$$

Der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten in Kapitel I entspricht hier eine stetige Funktion $\varkappa: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\int_{\Omega} \varkappa(x,y)dx = 1 \quad \text{für alle } y \in \Omega \quad . \tag{1.1}$$

In X wird durch den Kegel $\mathcal{K}_o$ der nichtnegativen Funktionen in natürlicher Weise eine Halbordnung ' $\geq$ ' induziert.

Dabei soll gelten: Es ist $u > 0$ genau dann, wenn $u(x) > 0$ ist für alle $x \in \Omega$. Ein Operator $A: X \to X$ heißt positiv ($A \geq 0$), wenn $Au \in \mathcal{K}_o$, falls $u \in \mathcal{K}_o$ ist. Der Operator A heißt strikt positiv ($A > 0$), wenn für beliebiges $u \in \mathcal{K}_o$ gilt $Au > 0$.

$\varkappa$ ist der Kern eines vollstetigen, positiven Integraloperators $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ (= Menge der linearen, stetigen Abbildungen von X nach X)

$$(\Phi U)(x) := \int_\Omega \varkappa(x,y)U(y)dy \quad .$$

Die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße ist gegeben durch

$$U^{t+1} = \Phi U^t \quad , \quad U^o \in \mathcal{K}_o \quad , \tag{1.2}$$

und es folgt aus (1.1)

$$\tilde{U}^{t+1} = \tilde{U}^o =: \tilde{U} \quad ,$$

d.h. die Gesamtgröße der Population bleibt konstant. Dies entspricht der Neumann-Bedingung in Kapitel I.

Für die Populationsdichten beschreibt - entsprechend (I 1.7) - die Funktion $k(x,y) := c^{-1}(x)\varkappa(x,y)c(y)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten. Sie bildet den Kern des vollstetigen, positiven Operators $K \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$(Ku)(x) := \int_\Omega k(x,y)u(y)dy \quad .$$

Wie in (I 1.11) fordert man

$$\Phi c = c \quad \text{oder} \quad \int_\Omega \varkappa(x,y)c(y)dy = c(x) \tag{1.3}$$

für alle $x \in \Omega$ .

Daraus ergibt sich

$$K\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X \qquad \text{oder} \qquad \int_\Omega k(x,y)dy = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega \,. \tag{1.4}$$

Dabei ist $\mathbf{1}_X(x) := 1$ für alle $x \in \Omega$ .

Für die zeitliche Entwicklung erhält man

$$u^{t+1} = Ku^t \,, \quad u^o \in \mathcal{K}_o \,, \tag{1.5}$$

und mit (1.1) gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega c(x)u^{t+1}(x)dx &= \int_\Omega c(y)u^t(y)\left[\int_\Omega \varkappa(x,y)dx\right]dy \\ &= \int_\Omega c(y)u^o(y)dy =: \tilde{U} \,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wir definieren

$$\tilde{u} := \frac{\tilde{U}}{\tilde{c}} \,. \tag{1.7}$$

b) Das Dirichlet-Problem

$\Omega \subset \mathbb{R}^p$ und X seien definiert wie in a). $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^q$ sei die Vereinigung endlich vieler meßbarer, zusammenhängender Mengen. $\tilde{\Omega}$ entspricht den Reservoiren in Kapitel I (möglich ist z.B. $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^p \setminus \Omega$ ). Es sei $Y := C_b(\tilde{\Omega}) = \{w \in C(\tilde{\Omega}) : w \text{ beschränkt}\}$. In Y ist eine natürliche Halbordnung gegeben, die wir ebenfalls mit ' $\geq$ ' bezeichnen.

$\mathbf{1}_Y$ sei analog definiert zu $\mathbf{1}_X$.

Die Kapazitäten der Orte $x \in \Omega$ , $z \in \tilde{\Omega}$ seien $c(x) > 0$ und $\tilde{c}(z) > 0$, $c \in X$, $\tilde{c} \in Y$.

$U \in X$ sei definiert wie in a); $\Psi \in Y$ sei die vorgegebene Populationsgröße in den Reservoiren. Wie in I 1b) und im vorigen Abschnitt seien nun zwei stetige Funktionen $\mu$ und $\tilde{\mu}$ gegeben; $\mu : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ und

$\tilde{\mu}: \Omega \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ , $\tilde{\mu}$ sei beschränkt und habe kompakten Träger. $\mu$ und $\tilde{\mu}$ können als Dichten von Übergangswahrscheinlichkeiten im Sinne von Kapitel I interpretiert werden.

Es sei $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mu}(x,z)dz < \infty$ , und für mindestens ein $x \in \Omega$ sei

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mu}(x,z)dz > 0. \tag{1.8}$$

Weiter gelte $\int_{\Omega} \mu(x,y)dx \leq 1$ für alle $y \in \Omega$ .

Nach Einführung einer diskreten Zeit $t = 0,1,\ldots$ kann man die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße beschreiben durch die Rekursionsgleichung

$$U^{t+1}(x) = \int_{\Omega} \mu(x,y)U^t(y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mu}(x,z)\Psi(z)dz ,$$
$$U^o \in \mathcal{H}_o ,$$

oder mit den von $\mu$ und $\tilde{\mu}$ erzeugten Integraloperatoren $T: X \to X$ und $\tilde{T}: Y \to X$:

$$U^{t+1} = TU^t + \tilde{T}\Psi \quad , \quad U^o \in \mathcal{H}_o . \tag{1.9}$$

Um die entsprechenden Rekursionen für die Dichten zu erhalten, definieren wir die Funktionen

$$m(x,y) := c^{-1}(x)\mu(x,y)c(y) ,$$
$$\tilde{m}(x,z) := c^{-1}(x)\tilde{\mu}(x,z)\tilde{c}(z) .$$

Die zugehörigen Integraloperatoren bezeichnen wir mit M und $\tilde{M}$ , $M: X \to X$ , $\tilde{M}: Y \to X$ , und es sei $\psi(z) := \frac{\Psi(z)}{\tilde{c}(z)}$ die vorgegebene, zeitunabhängige Dichte in den Reservoiren. Dann gilt

$$u^{t+1} = Mu^t + \tilde{M}\psi \quad , \quad u^o \in \mathcal{H}_o , \tag{1.10a}$$

oder mit $b := \tilde{M}\psi$

$$u^{t+1} = Mu^t + b \quad , \quad u^o \in \mathcal{H}_o . \tag{1.10b}$$

Es ist $\int_{\Omega} c(x)m(x,y)dx \leq c(x)$. (1.11)

Die zu (I 1.16) analoge Gleichgewichtsbedingung lautet hier

$$c(x) = \int_{\Omega} \mu(x,y)c(y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mu}(x,z)\tilde{c}(z)dz \quad ,$$

woraus sofort

$$\int_{\Omega} m(x,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega \tag{1.12}$$

oder $M\mathbf{1}_X + \tilde{M}\mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_X$

folgt.

Analog zu (I 1.18) läßt sich auch hier das inhomogene Problem (1.10) einem homogenen Problem der Form (1.15) subsumieren.

## 2. Abschätzungen für die Lösungen und Konvergenz gegen den stationären Zustand

### a) Das Neumann-Problem

Für die durch

$$u^{t+1} = Ku^t \cdot \qquad u^o \in \mathcal{K}_o \tag{1.5}$$

definierte Folge $(u^t)$ erhält man wie in Abschnitt I 1a)

$$\min_{x \in \Omega} \{u^o(x)\} \cdot 1_X \leq u^t \leq \max_{x \in \Omega} \{u^o(x)\} \cdot 1_X \tag{2.1}$$

für alle $t = 0,1,\ldots$ : Dazu definieren wir für $x \in X$, $z \in \mathcal{K}_o \setminus \{0\}$

$$m_1(x,z) := \sup \{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda z \leq x\} ,$$

$$m_2(x,z) := \inf \{\lambda \in \mathbb{R}: x \leq \lambda z\} .$$

Sei $A: X \to X$ ein positiver Operator und $z$ eine Eigenfunktion von $A$ zum Eigenwert 1; dann erhält man mit Bauer, Theorem 3

$$m_1(x,z)z \leq A^t x \leq m_2(x,z)z$$

für alle $t = 0,1,\ldots$ . Auf den Operator $K$ übertragen gewinnt man daraus und mit (1.4) die Abschätzung (2.1).

In Abschnitt b) werden zwei weitere Maximum-Prinzipien bewiesen, die sofort auf die Lösungen von (1.5) übertragen werden können.

Der Kegel $\mathcal{K}_o$ ist räumlich (d.h. er besitzt innere Punkte) und reproduzierend (d.h. seine lineare Hülle stimmt mit $X$ überein - zu den Definitionen s. Krasnoselskij [3], S.62). Aus $K1_X = 1_X$ folgt damit $r(K) = 1$ (zum Beweis s. Krasnoselskij [3], Sätze I 5.4,5.5 );
1 ist der betragsmäßig größte Eigenwert von $K$.

Wie in I 2a) muß man an den Operator K weitere Bedingungen stellen, um zu garantieren, daß $1_X$ die einzige Eigenfunktion zum Eigenwert 1 ist und daß die durch (1.5) definierte Folge $(u^t)$ gegen die stationäre Lösung $1_X$ konvergiert.

Im folgenden sei E immer ein reeller Banach-Raum mit Kegel $\mathcal{K}$.

Ein Operator A: E → E heißt positiv, wenn $A\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ gilt, und es sei $w \succ 0$, wenn w ein inneres Element von $\mathcal{K}$ ist.

Definition 1 (Krasnoselskij [2], S.261)

Ein positiver Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ heißt $u_o$-beschränkt (oder $u_o$-positiv), wenn es ein $u_o \in \mathcal{K}$, $u_o \neq 0$, gibt, so daß für jedes $\varphi \in \mathcal{K}$, $\varphi \neq 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(\varphi), \beta(\varphi) \succ 0$, existieren mit

$$\alpha u_o \leq A^n \varphi \leq \beta u_o \quad . \tag{2.2}$$

Gilt in dem speziellen Fall $E = X = C(\Omega)$ für den Kern k

$$u_o(x)d_1(y) \leq k(x,y) \leq u_o(x)d_2(y) \quad , \quad x,y \in \Omega \quad ,$$

wobei $u_o, d_1$ und $d_2$ nichtnegative, von $0 \in \mathcal{K}_o$ verschiedene stetige Funktionen sind, dann ist (2.2) für K und n=1 erfüllt, wenn man

$$\alpha = \int_\Omega d_1(x)\varphi(x)dx, \quad \beta = \int_\Omega d_2(x)\varphi(x)dx$$

setzt (Krasnoselskij [3], S.64). Eine $u_o$-beschränkte Matrix muß nicht irreduzibel sein, wie das Beispiel $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ zeigt (Marek 1, S.515).

Im folgenden werde K als $u_o$-beschränkt vorausgesetzt.

Lemma 1 (Krasnoselskij [2], S.261)

Ist $\varphi_o \in \mathcal{K}$, $\varphi_o \neq 0$ ein Eigenvektor eines $u_o$-beschränkten Operators A: E → E, dann ist A auch $\varphi_o$-beschränkt.

Wegen $K\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X$ ist K demnach $\mathbb{1}_X$-beschränkt, woraus sich wegen (2.2) für die durch (1.5) definierte Folge $(u^t)$ ergibt:
Zu jedem Anfangsdatum $u^o \in \mathcal{K}_o$, $u^o \neq 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^t = K^t u^o > 0$ für alle $t \geq n$.

Die wichtigste Folgerung aus der $u_o$-Beschränktheit von K erhält man mit

Satz 1 (Krasnoselskij [2], S.261)
Ein vollstetiger, $u_o$-beschränkter Operator $A \in \mathcal{L}(E)$ hat genau einen Eigenvektor $\varphi_o$ in $\mathcal{K}_o$.

$\mathbb{1}_X$ ist also bis auf skalare Faktoren die einzige nichtnegative Eigenfunktion von K, insbesondere die einzige nichtnegative stationäre Lösung von (1.5).
Wie in I2a) müssen die Forderungen an K noch verschärft werden, um die Konvergenz der Folge $(u^t)$ zu garantieren.

Definition 2 (Krasnoselskij [2], S.263, Voraussetzung zu Satz 2.3, Marek [2], S.485)
Ein $u_o$-beschränkter Operator A: E → E heißt stark $u_o$-beschränkt (oder stark $u_o$- positiv), wenn es zu jedem $\varphi \in E$ positive Zahlen $s \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$sA^q\varphi \geq u_o . \qquad (2.3)$$

Da $\mathcal{K}_o$ reproduzierend ist, gilt für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(X)$:

A ist $u_o$-beschränkt $\Leftrightarrow$ A ist stark $u_o$-beschränkt.

Wir können somit den folgenden Satz auf K anwenden:

Satz 2 (Krasnoselskij [2], S.263)

Sei $A \in \mathcal{L}(E)$ ein vollstetiger, stark $u_o$-beschränkter Operator. Dann ist der positive Eigenwert $\lambda_o$ des Operators A, der zu der positiven Eigenfunktion $\varphi_o$ gehört, einfach und betragsmäßig größer als alle anderen Eigenwerte.

Dabei heißt ein Eigenwert einfach, wenn der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.

Es gilt weiter der

Satz 3 Sei $A \in \mathcal{L}(E)$ vollstetig und positiv mit $r(A) = 1$.
1 sei Pol 1.Ordnung der Resolvente $R(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}$, und 1 sei betragsmäßig größer als alle anderen Eigenwerte von A. Dann gilt $A = P + B$, wobei $PB = BP = 0$, $r(B) < 1$ und P eine Projektion auf den Fixraum von A ist.

Beweis: Dieser Beweis ist eine direkte Übertragung des Beweises für den entsprechenden Satz, den Schaefer in [2], 3.3 für positive Matrizen bewiesen hat.

Setze $P := \lim_{\lambda \to 1} (\lambda - 1)R(\lambda)$. Es ist $AP = PA = P = P^2$. Die erste dieser Gleichungen folgt aus der Vertauschbarkeit von A und $R(\lambda)$.
Aus $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$ erhält man $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$,
woraus sich

$$AP = PA = \lim_{\lambda \to 1} (\lambda - 1)(\lambda R(\lambda) - I) = \lim_{\lambda \to 1} (\lambda - 1)R(\lambda) = P \tag{2.4}$$

ergibt. Für $|\lambda| > 1$ hat man $R(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} A^i$, also mit (2.4)

$$PR(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} P = (\lambda - 1)^{-1} P,$$

woraus $P^2 = P$ folgt.
Für $\varphi \in E$ mit $A\varphi = \varphi$ und $|\lambda| > 1$ gilt wegen $A^i \varphi = \varphi$

$$R(\lambda)\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} A^i \varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} \varphi = (\lambda - 1)^{-1} \varphi .$$

Also ist $P\varphi = \varphi$ und P somit eine Projektion auf den Fixraum von A. Setze $B := A - P$. Da A vollstetig und P endlichdimensional ist, ist B ein vollstetiger Operator. Weiter hat man

$$BP = AP - P^2 = 0 = PB \quad . \tag{2.5}$$

Falls es ein $\alpha$, $|\alpha| \geq 1$, gibt mit $\alpha\varphi = B\varphi$, $\varphi \neq 0$, dann erhält man mit (2.5) $\alpha P\varphi = \alpha PB\varphi = 0$, also $P\varphi = 0$ und $\alpha\varphi = A\varphi$. Daraus folgt $|\alpha| \leq 1$. Ist $\alpha = 1$, dann gilt mit $\varphi = A\varphi$ auch $\varphi = P\varphi = 0$. Für $\alpha \neq 1$, $|\alpha| = 1$, ergibt sich ebenfalls $\varphi = 0$, da 1 der einzige Eigenwert von A auf dem Einheitskreis ist.

Damit ist auch $r(B) < 1$ bewiesen. □

Satz 4 $K \in \mathcal{L}(X)$ habe die in 1a) geforderten Eigenschaften und sei $u_o$-beschränkt. Dann gilt für die durch (1.5) definierte Folge $(u^t)$,

$$\lim_{t \to \infty} \| u^t - \tilde{u} 1_X \| = 0 \quad . \tag{2.6}$$

Beweis: Aus den Sätzen 2 und 3 folgt $K^t = P + B^t$, wobei P eine Projektion auf den Fixraum $\{d1_X : d \in \mathbb{R}\}$ von K und $r(B) < 1$ ist. Demnach ist $\lim_{t \to \infty} \| K^t - P \| = 0$. Daraus erhält man mit $\lim_{t \to \infty} \| u^t - d1_X \| = 0$ für ein gewisses $d \in \mathbb{R}$ und mit (1.6) die Behauptung $d = \tilde{u}$. □

Es seien noch einige Bemerkungen zur Klasse der stark $u_o$-beschränkten Operatoren auf einem Banachraum E mit räumlichem Kegel $\mathcal{K}$ hinzugefügt. Stark $u_o$-beschränkt ist z.B. jeder stark positive Operator:

Definition 3 (Krasnoselskij [2], S.265)

Ein positiver Operator $A: E \to E$ heißt stark positiv, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{K}$, $\varphi \neq 0$, ein $n = n(\varphi)$ existiert, so daß $A^n\varphi > 0$ ist.

Im vorliegenden Fall ist K stark positiv, da K $u_o$-beschränkt ist mit $u_o = 1_X$.

Um ein Kriterium für starke Positivität bestimmter Integraloperatoren angeben zu können, das der in I Satz 3 gegebenen Bedingung für Primitivität positiver Matrizen ähnlich ist, benötigen wir die

Definition 4 (Krasnoselskij [2], S.266)

Ein positiver stetiger Kern $k_o(x,y)$ eines vollstetigen Operators $K_o: X \to X$, $X = C(\Omega)$,

$$(K_o \varphi)(x) := \int_\Omega k_o(x,y)\varphi(y)dy \quad ,$$

heißt Kern von positivem Typ , wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{K}_o$, $\varphi \neq 0$, gilt: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_\Omega k_o^{(n)}(x,y)\varphi(y)dy > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Es gilt

Satz 5 (Krein/Rutman, zitiert nach Krasnoselskij [2], S.266)

$k_o(x,y)$ sei der positive stetige Kern des vollstetigen Operators $K_o: X \to X$, $X = C(\Omega)$. Es gebe eine Iterierte $k_o^{(n)}$ von $k_o$ mit $k_o^{(n)}(x,x) > 0$ für ein $x \in \Omega$ . Dann ist $k_o$ ein Kern von positivem Typ.

Jeder Operator, der von einem Kern positiven Typs erzeugt wird, ist stark positiv.

b) Das Dirichlet-Problem

Seien jetzt $\Omega$, $\tilde{\Omega}$, M, $\tilde{M}$ und $\gamma$ wie in 1b). Die zeitliche Entwicklung der Populationsdichte ist gegeben durch die Rekursion

$$u^{t+1} = Mu^t + \tilde{M}\gamma = Mu^t + b \quad , u^o \in \mathcal{H}_o \quad . \tag{1.10}$$

Analog zum diskreten Modell hat man für die durch (1.10) definierte Folge $(u^t)$

Lemma 2 Sei $\underline{a} := \inf_{\substack{x\in\Omega \\ z\in\tilde{\Omega}}} \{u^o(x), \gamma(z)\}$ , $\overline{a} := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ z\in\tilde{\Omega}}} \{u^o(x), \gamma(z)\}$ .
Dann ist

$$\underline{a}\mathbb{1}_X \leq u^t \leq \overline{a}\mathbb{1}_X \quad \text{für alle } t \geq 0 \ .$$

Es gelten die beiden folgenden Maximum-Prinzipien:

Satz 6 $\underline{a}$ und $\overline{a}$ seien definiert wie in Lemma 2. M sei $u_o$-beschränkt. Ist $u^t = \underline{a}\mathbb{1}_X$ $(u^t = \overline{a}\mathbb{1}_X)$ für ein $t > 0$, dann ist $u^\tau = \underline{a}\mathbb{1}_X$ $(u^\tau = \overline{a}\mathbb{1}_X)$ für alle $\tau \geq 0$ .

Beweis: Aus der $u_o$-Beschränktheit von M erhält man : Für kein $y_o \in \Omega$ gibt es eine Umgebung (bzgl. der von $\mathbb{R}^p$ auf $\Omega$ induzierten Topologie) $\mathcal{U}(y_o) \subset \Omega$, so daß $m(x,y) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und alle $y \in \mathcal{U}(y_o)$. Andernfalls könnte man ein $\varphi \in \mathcal{H}_o$ finden mit $\varphi(y_o) > 0$, $\varphi(y) \equiv 0$ in $\Omega \setminus \mathcal{U}(y_o)$. Für dieses $\varphi$ erhielte man $M\varphi \not\equiv 0$ und damit einen Widerspruch zur $u_o$-Beschränktheit von M.
Der Rest des Beweises verläuft analog zu dem von I Satz 4. □

Satz 7 $\underline{a}$ und $\overline{a}$ seien definiert wie in Lemma 2. M sei stark positiv. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt: Ist $u^t(x_o) = \underline{a}$ $(u^t(x_o) = \overline{a})$ für ein $t \geq n$ und ein $x_o \in \Omega$ , dann folgt $u^\tau = \underline{a}\mathbb{1}_X$ $(u^\tau = \overline{a}\mathbb{1}_X)$ für alle $\tau \geq 0$.

Der Beweis von I Satz 5 ist sofort übertragbar.

Ist $M > 0$ , so gilt Satz 7 für $n = 1$ und entspricht damit dem starken Maximum-Prinzip für parabolische Differentialgleichungen.
Satz 6 und Satz 7 gelten sinngemäß ebenso für das Neumann-Problem, wenn man $M = K$ und $\Psi = 0$ setzt. Man beachte jedoch, daß in diesem Fall gilt : K ist $u_o$-beschränkt $\Rightarrow$ K ist stark positiv .

Mit Hilfe des nächsten Satzes lassen sich die Frage nach der Existenz einer stationären Lösung von (1.10) und die nach der Konvergenz der Folge $(u^t)$ beantworten.

Satz 8 M sei $u_o$-beschränkt. Dann ist $r(M) < 1$ .

Beweis: M ist vollstetig, hat also nach Satz 1 genau eine isolierte Eigenfunktion in $\mathcal{K}_o$; diese nennen wir u. Da r(M) der betragsmäßig größte Eigenwert von M ist, zeigen wir, daß 1 kein Eigenwert zu einer Eigenfunktion $u \in \mathcal{K}_o$, $u \neq 0$, sein kann.
Die Behauptung lautet somit: $Mu = u$ hat keine von $0 \in \mathcal{K}_o$ verschiedene Lösung in $\mathcal{K}_o$.
Angenommen, es gibt ein solches u, dann ist M nach Lemma 1 auch u-beschränkt, d.h. für jedes $\varphi \in \mathcal{K}_o$, $\varphi \neq 0$, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, mit

$$\alpha u \leq M^n \varphi \leq \beta u \quad . \tag{2.7}$$

u kann nicht konstant sein, da nach (1.8) $\int_\Omega m(\tilde{x},y)dy < 1$ ist für mindestens ein $\tilde{x} \in \Omega$.
Es gibt ein $x_o \in \Omega$ mit $u(x_o) > 0$ und $u(y) \leq u(x_o)$ für alle $y \in \Omega$.
Dann ist wegen (1.12)

$$\int_\Omega m(x_o,y)(u(y) - u(x_o))dy = u(x_o) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x_o,z)dz \quad . \tag{2.8}$$

Wegen $m \geq 0$, $u(y) - u(x_o) \leq 0$ für alle $y \in \Omega$ und $u(x_o) > 0$ ist $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x_o,z)dz = 0$ , also $\int_\Omega m(x_o,y)dy = 1$ .

Es existiert ein $y_o \in \Omega$ mit $u(y_o) < u(x_o)$ und eine Umgebung $\mathcal{U}(y_o)$ von $y_o$ mit $u(y) < u(x_o)$ , $y \in \mathcal{U}(y_o)$. Sei $S := \{y \in \Omega : u(y) < u(x_o)\}$. Da (2.8) nur erfüllt ist, wenn beide Seiten verschwinden, ist $m(x,y) = 0$ für $x \in \Omega\backslash S$, $y \in S$, und $\int_{\Omega\backslash S} m(x,y)dy = 1$ für $x \in \Omega\backslash S$. S ist offen und meßbar, und $\Omega\backslash S$ hat nichtleeres Inneres. Weiter ist $u(y) = u(x_o) > 0$ für alle $y \in \Omega\backslash S$.

Wählt man $\varphi \in \mathcal{K}_o$ mit $\varphi(y) > 0$ in S, $\varphi(y) = 0$ in $\Omega\backslash S$, so gilt

$$(M\varphi)(x) = \int_S m(x,y)\varphi(y)dy + \int_{\Omega\backslash S} m(x,y)\varphi(y)dy = 0$$

für $x \in \Omega\backslash S$. Daraus folgt $M^n\varphi = 0$ in $\Omega\backslash S$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch zur u-Beschränktheit und damit zur $u_o$-Beschränktheit von M, da $M^n\varphi \geq \alpha u$ in $\Omega\backslash S$ für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist (s.(2.7)). □

Mit Satz 8 und dem I Lemma 3 entsprechenden Satz für vollstetige Operatoren (Krasnoselskij [3], S.17) haben wir bewiesen:

Satz 9 Sei M $u_o$-beschränkt. Dann hat (1.10) genau eine stationäre Lösung $u_s = (I - M)^{-1}b = (I - M)^{-1}\tilde{M}\psi$, und für die durch (1.10) definierte Folge $(u^t)$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|u^t - u_s\| = 0 ,$$

unabhängig von der Anfangsbedingung $u^o \in \mathcal{K}_o$. Ist darüberhinaus M stark positiv und $b \neq 0$, so erhält man $u_s > 0$ .

Zum Abschluß beweisen wir noch ein Maximum-Prinzip für die Lösungen der zu (1.10) gehörenden stationären Gleichung

$$u = Mu + \tilde{M}\psi . \qquad (2.9)$$

Satz 10 Sei M $u_o$-beschränkt. Für die Lösung von (2.9) gilt

$$\inf_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\}\,\mathbf{1}_X \le u \le \sup_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\}\,\mathbf{1}_X \quad . \tag{2.10}$$

Ist M stark positiv, so erhält man: Falls ein $x_o \in \Omega$ existiert mit $u(x_o) = \inf_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\}$ $(u(x_o) = \sup_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\})$, dann ist $u = \inf_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\}\,\mathbf{1}_X$ $(u = \sup_{z\in\tilde{\Omega}}\{\psi(z)\}\,\mathbf{1}_X)$.

Beweis: Da M und $\tilde{M}$ positiv sind, ist auch der Operator $H := (I - M)^{-1}\tilde{M}$, $H: Y \to X$, positiv, und es gilt

$$H\mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_X \quad . \tag{2.11}$$

Aus $u = H\psi$ und (2.11) erhält man (2.10).

Angenommen, es gibt $x_o, x_1 \in \Omega$ mit $u(x_o) = \sup \psi$, $u(x_1) < \sup \psi$. Dann existiert eine Menge $\mathcal{U} \subset \Omega$ mit den Eigenschaften

$$u(x) < \sup \psi \quad \text{für alle } x \in \mathcal{U} \ ,$$
$$u(x) = \sup \psi \quad \text{für alle } x \in \Omega\backslash\mathcal{U} \ , \ \mathring{\mathcal{U}} \neq \emptyset \ .$$

Für jedes $\tilde{x} \in \Omega\backslash\mathcal{U}$ gilt

$$\sup \psi = u(\tilde{x}) = \int_{\Omega} m(\tilde{x},y)u(y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(\tilde{x},z)\psi(z)dz \ . \tag{2.12}$$

Wegen $\tilde{M}\psi \le \sup\psi \cdot \tilde{M}\mathbf{1}_Y$ und (1.12) folgt daraus $m(\tilde{x},y) = 0$ für alle $(\tilde{x},y) \in \Omega\backslash\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Sei $\mathcal{U}_\psi := \{\varphi \in \mathcal{H}_o : \varphi \neq 0 \text{ in } \mathcal{U}\ ,\ \varphi = 0 \text{ in } \Omega\backslash\mathcal{U}\}$.

Es ergibt sich: $\varphi \in \mathcal{U}_\psi \Rightarrow M\varphi \in \mathcal{U}_\psi$ ; denn sei $\tilde{x} \in \Omega\backslash\mathcal{U}$, dann ist

$$(M\varphi)(\tilde{x}) = \int_{\mathcal{U}} m(\tilde{x},y)\varphi(y)dy + \int_{\Omega\backslash\mathcal{U}} m(\tilde{x},y)\varphi(y)dy = 0 \ ,$$

da im ersten Integral m, im zweiten $\varphi$ identisch verschwindet. Damit hat man $M^n\varphi \in \mathcal{U}_\psi$ für alle $\varphi \in \mathcal{U}_\psi$ und alle $n \in \mathbb{N}$: Widerspruch zur starken Posivität von M. □

Anmerkung 1 Für den zweiten Teil von Satz 10 genügt es auch zu fordern, daß M im Schaeferschen Sinne unzerlegbar ist (s.Schaefer [1], S.308 f).

## 3. Interaktion zwischen Migration und Reproduktion

Die Reproduktion der Population werde durch eine Funktion beschrieben, die folgende Eigenschaften besitzt: $g: \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sei in beiden Variablen stetig, $g(x,\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sei stetig differenzierbar, und es gelte für alle $x \in \Omega$ und alle $u \in \mathbb{R}_+$ $(g'(x,u) := \frac{\partial}{\partial u} g(x,u))$:

$$\begin{aligned} &g(x,0) = 0 \ , \quad g(x,1) = 1 \ , \\ &g'(x,0) > 1 \ , \quad g'(x,u) \geq 0 \ , \\ &g(x,u) > u \quad \text{für } 0 < u < 1 \ , \\ &g(x,u) < u \quad \text{für } u > 1 \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aus (3.1) folgt $g'(x,1) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$.

### a) Das Neumann-Problem

Analog zu I 3b) erhält man für die zeitliche Entwicklung der Populationsdichte die Rekursionsgleichung

$$u^{t+1}(x) = \int_\Omega k(x,y) g(y, u^t(y)) dy \ , \quad u^0 \in \mathcal{K}_0 \ , \tag{3.2}$$

oder $$u^{t+1} = Kg(u^t) \ , \quad u^0 \in \mathcal{K}_0 \ ,$$

wobei $k$ wieder die in Abschnitt 1 genannten Eigenschaften habe. Wie in I 3b) kann man wegen $K \geq 0$, $K\mathbf{1}_\chi = \mathbf{1}_\chi$ und (3.1) zeigen, daß für die durch (3.2) definierte Folge $(u^t)$ die Abschätzung

$$\underline{\beta} \mathbf{1}_\chi \leq u^t \leq \overline{\beta} \mathbf{1}_\chi \tag{3.3}$$

gilt; dabei ist $\underline{\beta} := \min_{x \in \Omega} \{u^0(x), 1\}$ , $\overline{\beta} := \max_{x \in \Omega} \{u^0(x), 1\}$ .
Weitergehende Maximum-Prinzipien werden in Abschnitt b) bewiesen.

Lemma 3 K sei $u_o$-beschränkt, g genüge (3.1), und es sei $u^o \neq 0$. Dann erhält man für die Folge $(u^t)$: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^t > 0$ für alle $t \geq n$.

Beweis: K ist stark positiv wegen Lemma 1 und (1.4). Der weitere Beweis verläuft wie in I Lemma 7, denn da $\Omega$ kompakt ist, kann $\lambda$ entsprechend gebildet werden. □

Satz 11 Sei K $u_o$-beschränkt und $u^o \neq 0$. Dann gilt für die durch (3.2) definierte Folge $(u^t)$

$$\lim_{t \to \infty} \| u^t - 1_X \| = 0 \quad .$$

Beweis: Wie in I Satz 9 beweist man die Konvergenz der Folgen $(\underline{u}^t)$ und $(\overline{u}^t)$, wenn man beachtet:

i) Ist $u^t - u^{t-1} \geq 0$ und $w \in X$ mit $\underline{u}^{t-1} \leq w \leq \underline{u}^t$, dann gilt

$$\underline{u}^{t+1}(x) - \underline{u}^t(x) = \int_\Omega k(x,y) g'(y, w(y))(\underline{u}^t(y) - u^{t-1}(y))dy \geq 0$$

für alle $x \in \Omega$.

ii) Eine monotone, kompakte Folge konvergiert.

Zu zeigen bleibt noch $\underline{\underline{u}} = 1_X = \overline{\overline{u}}$ ( mit den Bezeichnungen von I Satz 9).

Angenommen, es ist $\underline{\underline{u}}(x_o) < 1$ für mindestens ein $x_o \in \Omega$, dann folgt $g(x_o, \underline{\underline{u}}(x_o)) > \underline{\underline{u}}(x_o)$. Weiter erhält man

$$1 - \underline{\underline{u}}(x) = \int_\Omega k(x,y)(1 - g(y, \underline{\underline{u}}(y)))dy \leq \int_\Omega k(x,y)(1 - \underline{\underline{u}}(y))dy. \tag{3.4}$$

Um zu beweisen, daß die letzte Ungleichung in (3.4) echt ist, nehmen wir an, daß für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\int_\Omega k(x,y)(1 - g(y, \underline{\underline{u}}(y)))dy = \int_\Omega k(x,y)(1 - \underline{\underline{u}}(y))dy \quad . \tag{3.5}$$

Nun ist aber $g(x, \underline{\underline{u}}(x)) > \underline{\underline{u}}(x)$ für alle x aus einer Umgebung $\mathcal{U}(x_o)$, somit muß $k(x,y) = 0$ sein für alle $x \in \Omega$, $y \in \mathcal{U}(x_o)$. Das widerspricht

der starken Positivität von K (s. den Beweis zu Satz 6). (3.5) kann also nicht für alle $x \in \Omega$ gelten.

Nach (1.6) ist

$$\int_{\Omega} c(x)(K(1 - \underline{u}))(x)dx = \int c(x)(1 - \underline{u}(x))dx \quad .$$

Wegen $c > 0$ ist dies ein Widerspruch zu (3.4). □

b) Das Dirichlet-Problem

Ziehen wir im Falle des Modells (1.10) auch Reproduktionsvorgänge innerhalb der Population in Betracht, so erhalten wir für die zeitliche Entwicklung der Populationsdichte die Rekursionsgleichung

$$u^{t+1}(x) = \int_{\Omega} m(x,y)g(y,u^t(y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz \quad , \qquad (3.6)$$
$$u^o \in \mathcal{K}_o \quad .$$

Dabei sei g eine Funktion wie in (3.1), m,$\tilde{m}$ bzw. M,$\tilde{M}$ und $\Psi$ seien definiert wie in Abschnitt 1. Die folgenden Aussagen über $(u^t)$ beweist man wie die entsprechenden Sätze in I 3c) bzw. Abschnitt 2b). Wie in den früher untersuchten Modellen lassen sie sich sofort auf das Neumann-Problem übertragen.

Satz 12 Seien $\underline{\alpha} := \inf_{\substack{x \in \Omega \\ z \in \tilde{\Omega}}} \{u^o(x), \Psi(z), 1\}$ , $\bar{\alpha} := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ z \in \tilde{\Omega}}} \{u^o(x), \Psi(z), 1\}$

und $(u^t)$ die durch (3.6) definierte Folge. Dann gilt:

i) Es ist $\underline{\alpha}\mathbb{1}_X \leq u^t \leq \bar{\alpha}\mathbb{1}_X$ für alle $t \geq 0$ .

ii) Sei M $u_o$-beschränkt. Ist $\underline{\alpha} < 1$ $(\bar{\alpha} > 1)$ und $u^t = \underline{\alpha}\mathbb{1}_X$ $(u^t = \bar{\alpha}\mathbb{1}_X)$ für ein $t > 0$, so folgt $u^\tau = \underline{\alpha}\mathbb{1}_X$ $(u^\tau = \bar{\alpha}\mathbb{1}_X)$ für alle $\tau \geq 0$.

iii) Sei M stark positiv. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ , so daß gilt:

Ist $\underline{\alpha} < 1$ $(\bar{\alpha} > 1)$ und $u^t(x_o) = \underline{\alpha}$ $(u^t(x_o) = \bar{\alpha})$ für ein $t \geq n$ und ein $x_o \in \Omega$, dann ist $u^\tau = \underline{\alpha} 1_X$ $(u^\tau = \bar{\alpha} 1_X)$ für alle $\tau \geq 0$. Für $M > 0$ ist $n = 1$.

Setzt man analog zu I 3c) $\lambda := \inf \left\{ \frac{g(x,v)}{v} : 0 < v \leq \bar{\alpha} \right\}$, so ist $0 < \lambda \leq 1$ und $g(x,u) \geq \lambda u$ für alle $x \in \Omega$. Daraus erhält man die Abschätzung

$$u^t \geq \lambda^t M^t u^o + \sum_{\tau=0}^{t-1} (\lambda M)^\tau b \,, \tag{3.7}$$

und falls $r(M) < 1$ ist und $\lim_{t\to\infty} u^t = u_s$ existiert:

$$\bar{b} := \sum_{\tau=0}^{\infty} (\lambda M)^\tau b \leq u_s \leq \bar{\alpha} 1_X \,.$$

Für stark positives M ergibt sich: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^t \gneq 0$ für alle $t \geq n$, und falls $b \neq 0$ ist, hat man $\bar{b} > 0$ und somit $u_s > 0$.

Der Hauptsatz dieses Abschnittes wird sinngemäß wie I Satz 12 bewiesen:

Satz 13 Es sei M stark positiv; $g$ genüge den Bedingungen (3.1) und sei quasi-konkav bezüglich $u$ für alle $x \in \Omega$, $u > 0$. Weiter gelte $u^o \neq 0$ und $\psi(z) \geq \delta > 0$ für ein $\delta \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \tilde{\Omega}$.
Dann besitzt (3.6) genau eine stationäre Lösung $u_s > 0$, und es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \| u^t - u_s \| = 0 \,.$$

## III. DIE SKALAREN KONTINUIERLICHEN MODELLE

### 1.a) Kurze Herleitung der Gleichungen

Wir wollen zunächst eine in der Zeit kontinuierliche Gleichung herleiten, die dem Modell (II 1.5) entspricht, also die Migration einer Population unter Neumann-Bedingungen beschreibt.
Setzt man $u^t(x) = u(t,x)$, so ergibt (II 1.5)

$$u(t+1,x) - u(t,x) = \int_{\Omega} k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x). \qquad (1.1)$$

Nimmt man an, daß die rechte Seite von (1.1) direkt proportional zur Größe der Zeitschritte ist, so folgt

$$u(t+h,x) - u(t,x) = h\left(\int_{\Omega} k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x)\right). \qquad (1.2)$$

Für $h \to 0$ ergibt sich dann aus (1.2) die Integro-Differentialgleichung

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x). \qquad (1.3)$$

Ebenso erhält man die kontinuierliche Version von (II 1.10)

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} m(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\varphi(z)dz - u(t,x). \qquad (1.4)$$

Eine Möglichkeit, auch Reproduktionsvorgänge in die nur Migration beschreibenden Modelle (1.3) und (1.4) einzuführen, bietet die Bildung der kontinuierlichen Analoga zu (II 3.2) und (II 3.6):

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} k(x,y)g(y,u(t,y))dy - u(t,x) \qquad (1.5)$$

bzw.

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} m(x,y)g(y,u(t,y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\varphi(z)dz - u(t,x). \qquad (1.6)$$

Bedenkt man jedoch, daß die Gleichungen in den Kapiteln I und II aus der Betrachtung eines Zeitintervalls vorgegebener Länge abgeleitet wurden und daß dabei eine bestimmte zeitliche Abfolge von Repro-

duktion und Migration festgesetzt werden mußte, dann kann man die hier zu untersuchenden Vorgänge auch anders modellieren. Da in den Gleichungen (1.3) und (1.4) die Änderung der Populationsdichte 'in einem Zeitpunkt' betrachtet wird, kann man annehmen, daß Reproduktion und Migration simultan stattfinden. Die jeweiligen Änderungen der Populationsdichte, die durch Reproduktions- bzw. Migrationsvorgänge verursacht werden, überlagern sich.

Sei f eine geeignete Wachstumsfunktion; dann kann die Population durch eine Funktion beschrieben werden, die im Falle der Neumann-Bedingung der Gleichung

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) + f(u(t,x)) \qquad (1.7)$$

genügt, und im Falle der Dirichlet-Bedingung der Gleichung

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} m(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz - u(t,x) + f(u(t,x)). \qquad (1.8)$$

Dabei kann f auch von x abhängen.

Ich werde mich im folgenden hauptsächlich mit den Gleichungen (1.7) und (1.8) beschäftigen, da sie in einem gewissen Sinne Verallgemeinerungen des Neumann- bzw. des Dirichlet-Problems für semilineare parabolische Differentialgleichungen sind. Dies kann man am Beispiel von (1.7) folgendermaßen begründen (vgl. auch Fife , Abschnitt 1.2):

Wir betrachten einen Spezialfall, nämlich $\Omega := (-\infty, \infty)$, $k(x,y) := k(x-y)$, $k \geq 0$, k gerade, und es gelte : $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx = 1$ ,

$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)x^2dx < \infty$ (dies gilt z.B., wennn k kompakten Träger hat).

Sei $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ ein Parameter und $k_\sigma(x) := \alpha_\sigma k(\frac{x}{\sigma})$. Aus

$\int_{-\infty}^{\infty} k_\sigma(x)dx = 1$ folgt $\alpha_\sigma = \frac{1}{\sigma}$ ; also ist $k_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma}k(\frac{x}{\sigma})$.

Für eine fest gewählte, hinreichend glatte Funktion u kann man die folgende Entwicklung aufschreiben.

Es ist

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k_\sigma(x-y)u(t,y)dy - u(t,x)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)u(t,y)dy - u(t,x)\right) =: (*)$$

Mit $\frac{x-y}{\sigma} =: -z$ erhält man daraus wegen $k(z) = k(-z)$

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(z)u(t,x+\sigma z)dz - u(t,x)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} k(z)\left[u(t,x) + \sigma u_x(t,x)z + \frac{\sigma^2}{2}u_{xx}(t,x)z^2 + \ldots\right]dz - u(t,x)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma}u_x(t,x)\int_{-\infty}^{\infty} k(z)z\,dz + \frac{1}{2}u_{xx}(t,x)\int_{-\infty}^{\infty} k(z)z^2dz + o(\sigma)\ .\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung verschwindet das erste Integral des letzten Ausdrucks, das zweite ist beschränkt.

Für kleine $\sigma$ ist demnach der Diffusionsoperator (multipliziert mit einer Konstanten, die aber durch eine Reskalierung der Zeitachse zu 1 normiert werden kann) eine Approximation gewisser Operatoren $A = K_F - I$; dabei ist $K_F$ ein Faltungsoperator. In diesem Sinne sind die Gleichungen (1.7) und (1.8) Verallgemeinerungen der entsprechenden Diffusionsgleichungen.

b) Bezeichnungen und Voraussetzungen

Die im folgenden eingeführten Bezeichnungen und Bedingungen werden in allen Abschnitten des Kapitels III vorausgesetzt. Eine biologische Interpretation der jeweiligen Größen erhält man durch Vergleich mit dem in I 1 und II 1 Gesagten.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ zusammenhängend und kompakt, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^q$ sei die Vereinigung endlich vieler meßbarer, zusammenhängender Mengen.

$X := C(\Omega)$ sei der Banachraum der auf $\Omega$ stetigen, reellwertigen Funktionen mit der sup-Norm $\|\cdot\|_X$, $Y := C_b(\tilde{\Omega})$ der Raum der auf $\tilde{\Omega}$

stetigen und beschränkten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ und der sup - Norm $\|\cdot\|_Y$, und sei $C_T := C([0,T],X)$ der Banachraum der auf $[0,T]$ stetigen Funktionen mit Werten in X und der Norm $\|u\|_{C_T} := \sup_{0\le t\le T}\|u[t]\|_X$. Wir definieren $G := [0,T]\times\Omega$. Es ist $C(G) = C_T$.

$\mathcal{K}_o \subset X$ sei der Kegel der nichtnegativen Funktionen aus X. Die von ihm auf X induzierte Halbordnung bezeichnen wir - wie auch alle anderen vorkommenden Halbordnungen, z.B. in Y, $C_T$ - aus praktischen Gründen mit " $\le$ ". Aus dem Zusammenhang wird jeweils klar, welche Halbordnung gemeint ist. Für eine Funktion $u \in C_T$ gilt: Es ist $u \ge 0$ genau dann, wenn die Werte von u[t] in $\mathcal{K}_o$ liegen für alle $t \in [0,T]$. Für alle $u \in \mathcal{K}_o$ gelte

$$u > 0 \iff u(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega ,$$
$$u = 0 \iff u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Entsprechend werden die Zeichen " > " und " = " in allen anderen betrachteten Räumen benutzt.

$k: \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}_+$ sei stetig, und es sei

$$\int_\Omega k(x,y)dy = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega . \tag{1.9}$$

Es gebe eine strikt positive Funktion $c \in X$ mit

$$\int_\Omega c(x)dx =: \mathcal{C} \tag{1.10}$$

und
$$\int_\Omega c(x)k(x,y)dx = c(y) \tag{1.11}$$

für alle $y \in \Omega$ .

Zu einer Funktion $u \in C_T$ definieren wir

$$\tilde{U}(t) := \int_\Omega c(x)u(t,x)dx \quad . \tag{1.12}$$

I sei der Identitätsoperator auf dem jeweils betrachteten Raum.

$K \in \mathcal{L}(X)$ sei der von k erzeugte Integraloperator.

$m: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ und $\tilde{m}: \tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ seien stetige Funktionen, $\tilde{m}$ habe kompakten Träger, und es gelte

$$\int_{\Omega} m(x,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega \,. \tag{1.13}$$

Für mindestens ein $x \in \Omega$ sei $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz > 0$ . (1.14)

$M \in \mathcal{L}(X)$ und $\tilde{M} \in \mathcal{L}(Y,X)$ seien die von m bzw. $\tilde{m}$ erzeugten Integraloperatoren.

Es sei $\psi \in Y$, $\psi \geq 0$, und $b \in X$ sei definiert durch

$$b(x) := \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz \,.$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig mit der globalen Lipschitz-Konstanten F.

$1_X \in X$ und $1_Y \in Y$ seien diejenigen Funktionen, die auf $\Omega$ bzw. $\tilde{\Omega}$ identisch gleich eins sind.

## 2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen und ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe für das Neumann-Problem:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) + f(u(t,x)), \\ u(0,x) &= u^0(x) \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Äquivalent zu (2.1) ist die Integralgleichung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (\mathfrak{J}_{u^0}u[t])(x): \\ &= \int_0^t \left[ \int_\Omega k(x,y)u(\tau,y)dy - u(\tau,x) + f(u(\tau,x)) \right] d\tau + u^0(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

oder $u[t] = \mathfrak{J}_{u^0}u[t]$ .

Ist die Hervorhebung des speziellen Anfangsdatums $u^0$ unwichtig, so bezeichnen wir den Integraloperator nur mit $\mathfrak{J}$ .

Lemma 1 Für jedes $T > 0$ und jedes $u^0 \in X$ gilt $\mathfrak{J}: C_T \to C_T$ .

Beweis: Sei $u \in C_T$ beliebig.

i) Für jedes feste $t \in [0,T]$ ist $\mathfrak{J}u[t] \in X$ :

Seien $x_1, x_2 \in \Omega$ . Dann hat man

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}u[t](x_1) - \mathfrak{J}u[t](x_2)| &\le \|u\|_{C_T} \int_0^t \int_\Omega |k(x_1,y) - k(x_2,y)|\, dy d\tau \\ &+ \int_0^t |u(\tau,x_1) - u(\tau,x_2)|\, d\tau + \int_0^t |f(u(\tau,x_1)) - f(u(\tau,x_2))|\, d\tau \\ &+ |u^0(x_1) - u^0(x_2)| \quad . \end{aligned}$$

Es ist $\|u\|_{C_T} < \infty$ , und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von k und u, der Stetigkeit von $u^0$ und der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt die Behauptung i).

ii) Die Abbildung $t \mapsto \mathfrak{J}u[t]$ von $[0,T]$ nach X ist stetig:

Sei $0 \le t_2 \le t_1 \le T$, dann gilt:

$$\sup_{x\in\Omega}|\mathcal{J}u[t_1](x) - \mathcal{J}u[t_2](x)| = \sup_{x\in\Omega}\left|\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega k(x,y)u(\tau,y)dy - u(\tau,x) + f(u(\tau,x))\right]d\tau\right|$$

$$\leq \|u\|_{C_T}(2 + F)(t_1 - t_2) .$$

Damit ist ii) bewiesen. □

Satz 1 Für alle $T > 0$ und alle $u^0 \in X$ hat (2.2) bzw. (2.1) genau eine Lösung $u \in C_T$. u hängt stetig von $u^0$ ab und ist stetig differenzierbar nach t.

Beweis: Seien $u,v \in C_T$ beliebige Funktionen mit $u(0,x) = v(0,x)$ für alle $x \in \Omega$. Es ist

$$\|\mathcal{J}u - \mathcal{J}v\|_{C_T} \leq \|u - v\|_{C_T}(2 + F)T \quad .$$

Für $T_o < (2 + F)^{-1}$ ist $\mathcal{J}$ eine Kontraktion in $C_{T_o}$, woraus sich mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u von (2.2) ergibt. Wegen der Stetigkeit des Integranden ist u stetig differenzierbar und somit Lösung von (2.1), und wegen der globalen Lipschitz-Konstanten erhält man gleichzeitig globale Existenz. $u, v \in C_T$ seien nun zwei Lösungen von (2.2) mit $u(0,x) = u^0(x)$ und $v(0,x) = v^0(x)$, $u^0, v^0 \in X$. Es ist

$$\|u - v\|_{C_T} \leq \frac{1}{1 - (2+F)T_o}\|u^0 - v^0\|_X .$$

Aus dem üblichen Fortsetzbarkeitsargument folgt damit die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten für beliebige Intervalle $[0,T]$.

Korollar 1 Für alle $T > 0$ und alle $u^0 \in X$ hat das Dirichlet-Problem

$$u_t(t,x) = \int_\Omega m(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde\Omega}\tilde m(x,z)dz\,\Psi(z)dz - u(t,x) + f(u(t,x)), \qquad (2.3)$$

$$u(0,x) = u^0(x) ,$$

genau eine Lösung u in $C_T$. u hängt stetig von $u^o$ ab und ist stetig differenzierbar nach t.

Beweis: Der Beweis von Satz 1 läßt sich sofort auf das Dirichlet-Problem übertragen.

Anmerkung 1 Ist f = f(x,u) eine stetige Funktion von x und erfüllt bezüglich u die Voraussetzungen in 1b), dann gilt Satz 1 wegen der Kompaktheit von $\Omega$ unverändert.

Fordert man von f nur lokale Lipschitz-Stetigkeit, so läßt sich das Analogon zum Satz von Picard-Lindelöf beweisen.

## 3. Ein Vergleichssatz und zwei Maximum-Prinzipien

Für die folgenden Sätze wurden hauptsächlich Anregungen aus Kapitel IV des Buches von W.Walter verarbeitet.

Zunächst wird ein Lemma bewiesen, dessen Aussage die Grundlage für alle weiteren Beweise dieses-Abschnittes bildet.

Lemma 2 Es sei $u \in C_T$, $u(0,x) = u^o(x)$, $u^o > 0$, und $u_t$ existiere und sei stetig in $G = [0,T] \times \Omega$ .
Es gelte: Hat u in $(t_o,x_o) \in G$ ein relatives Minimum bezüglich x mit $u(t_o,x_o) = 0$, derart daß $u(t,x) > 0$ für alle $(t,x) \in [0,t_o) \times \Omega$ ist, so folgt $u_t(t_o,x_o) > 0$.
Dann ist $u > 0$ in G.

Beweis: Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es $\bar{t} \leq T$ und $\bar{x} \in \Omega$ , so daß $u(t,x) > 0$ für $(t,x) \in [0,\bar{t}) \times \Omega$ , aber $u(\bar{t},\bar{x}) = 0$. Da wegen Stetigkeit $u(\bar{t},x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ ist, hat u in $(\bar{t},\bar{x})$ ein Minimum bezüglich x wie in der Voraussetzung beschrieben. Also ist $u_t(\bar{t},\bar{x}) > 0$. Andererseits ist $u(t,\bar{x}) > 0$ für $t < \bar{t}$ und $u(\bar{t},\bar{x}) = 0$, also $u_t(\bar{t},\bar{x}) \leq 0$: Widerspruch. □

Korollar 2 v und w seien Funktionen aus $C_T$, stetig differenzierbar nach t in G, mit $v(0,x) = v^o(x)$, $w(0,x) = w^o(x)$.
Es gelte $w^o > v^o$. Ist $w(t_o,x_o) = v(t_o,x_o)$ für ein $(t_o,x_o) \in G$ und $w > v$ auf $[0,t_o) \times \Omega$ , so folge $w_t(t_o,x_o) > v_t(t_o,x_o)$.
Dann ist $w > v$ in G.

Beweis: Man wende Lemma 2 auf $w - v$ an. □

Definition 1 Es seien für $u \in C_T$

$$(Pu)(t,x) := u_t(t,x) - \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy + u(t,x) - f(u(t,x)),$$

$$(Q_\psi u)(t,x) := u_t(t,x) - \int_\Omega m(x,y)u(t,y)dy - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz + u(t,x) - f(u(t,x)) .$$

Ist die Unterscheidung der Dichten in $\tilde{\Omega}$ unwesentlich, so genügt die Bezeichnung Qu. Man nennt Pu bzw. Qu die Defekte der Gleichungen (2.1) bzw. (2.3).

Definition 2 Die Klasse $\mathcal{E}$ bestehe aus allen Funktionen $\omega(t,r)$, $\omega : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, mit folgender Eigenschaft:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und eine stetige Funktion $\rho(t)$, $\rho : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, stetig differenzierbar in $(0,T]$, mit $\delta \le \rho(t) < \varepsilon$ in $[0,T]$ und $\rho'(t) > \omega(t,\rho(t))$ in $(0,T]$.

Lemma 3 Es gibt ein $\omega \in \mathcal{E}$, so daß für jede Funktion $w \in C_T$ und jedes $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, gilt:

$$f(w(t,x) + r) - f(w(t,x)) \le \omega(t,r) \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Beweis: Da f Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten F ist, hat man

$$f(w + r) - f(w) \le Fr .$$

Sei $\omega(t,r) := Fr$, und sei $\rho(t) := \tilde{\xi} \exp(\tilde{F}(t-T))$ für Konstanten $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{F} > F$. Es gilt $\rho(t) \ge \tilde{\xi}\exp(-\tilde{F}T) =: \delta$, $\rho(t) \le \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$,
$\rho'(t) = \tilde{F}\rho(t) > F\rho(t) = \omega(t,\rho(t))$. □

Der folgende Vergleichssatz ist die Übertragung einer speziellen Form des Nagumo-Westphal-Lemmas für parabolische Differentialgleichungen auf die hier untersuchten Probleme. Mit seiner Hilfe lassen sich u.a. Unter- und Oberlösungen für die Gleichungen (2.1) und (2.3) bestimmen.

Satz 2 Es seien u und v aus $C_T$, stetig differenzierbar nach t in G, und es gelte $u(0,x) = u^0(x)$, $v(0,x) = v^0(x)$, $u^0 \geq v^0$.

i) Ist $Pu \geq Pv$, dann folgt $u \geq v$ in G.

ii) Seien $\psi, \sigma \in Y$, $\psi \geq \sigma$.

Ist $Q_\psi u \geq Q_\sigma v$, dann folgt $u \geq v$ in G.

Beweis: Es genügt, ii) zu beweisen; der Beweis von i) ergibt sich aus dem folgenden, wenn man m durch k ersetzt und $\psi = \sigma = 0$ annimmt. Seien $\omega \in \mathcal{E}$ eine Funktion wie in Lemma 3, $\varepsilon > 0$ und $\varrho$ die zugehörige Funktion. Wenn man zeigen kann, daß $v < u + \varrho$ in G ist, dann folgt die Behauptung, da $\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden kann.

Wir definieren $\chi := u + \varrho - v$, $\chi \in C_T$. Es ist $\chi(0,x) > 0$.

$\chi$ erfüllt die Bedingungen von Lemma 2:

$(t_o,x_o)$ sei im Sinne von Lemma 2 ein 'erstes' Minimum von $\chi$ mit $\chi(t_o,x_o) = 0$. Dann folgt wegen $\chi(t_o,y) \geq 0$ für alle $y \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \int_\Omega m(x_o,y)\chi(t_o,y)dy + u_t(t_o,x_o) - \int_\Omega m(x_o,y)u(t_o,y)dy \\
& - \int_{\tilde\Omega} \tilde m(x_o,z)\psi(z)dz + u(t_o,x_o) - f(u(t_o,x_o)) - v_t(t_o,x_o) \\
& + \int_\Omega m(x_o,y)v(t_o,y)dy + \int_{\tilde\Omega} \tilde m(x_o,z)\sigma(z)dz - v(t_o,x_o) \\
& + f(v(t_o,x_o)) \\
\leq & \; u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + \varrho(t_o)\Big(\int_\Omega m(x_o,y)dy - 1\Big) \\
& + f(v(t_o,x_o)) - f(u(t_o,x_o)) \\
\leq & \; u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + \omega(t_o,\varrho(t_o)) \\
< & \; u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + \varrho'(t_o) = \chi_t(t_o,x_o) \; .
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 2 ist $\chi > 0$ und damit $u \geq v$ in G. □

Wir beweisen nun einen Satz, der dem schwachen Maximum-Prinzip für parabolische Differentialgleichungen entspricht.

Satz 3 Sei $u \in C_T$, stetig differenzierbar nach t auf $[0,T]\times\Omega = G$.

i) Wir setzen $\underline{A} := \min_{x\in\Omega}\{u^0(x)\}$ , $\overline{A} := \max_{x\in\Omega}\{u^0(x)\}$ .

Ist $Pu \geq 0$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \geq 0$ für $\underline{A} - \varepsilon < w < \underline{A}$, so gilt $u \geq \underline{A}$ in G.

Ist $Pu \leq 0$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \leq 0$ für $\overline{A} < w < \overline{A} + \varepsilon$, so gilt $u \leq \overline{A}$ in G.

ii) Wir setzen $\underline{a} := \inf_{\substack{x\in\Omega \\ z\in\bar{\Omega}}} \{u^0(x), \Psi(z)\}$ , $\overline{a} := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ z\in\bar{\Omega}}} \{u^0(x), \Psi(z)\}$ .

Ist $Qu \geq 0$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \geq 0$ für $\underline{a} - \varepsilon < w < \underline{a}$, so gilt $u \geq \underline{a}$ in G.

Ist $Qu \leq 0$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \leq 0$ für $\overline{a} < w < \overline{a} + \varepsilon$, so gilt $u \leq \overline{a}$ in G.

Beweis: Es genügt, den ersten Teil von ii) zu beweisen. Wir setzen in Korollar 2 $v(t,x) = v(t) := \underline{a} - \delta t - \tilde{\varepsilon}$ mit $\delta, \tilde{\varepsilon} > 0$, $\delta T + \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , und $w = u$. Nun sei $v(t_0) = u(t_0,x_0)$ in einem Punkt $(t_0,x_0) \in G$ und $v < u$ in $[0,t_0)\times\Omega$ . Dann erhält man wegen $u(t_0,y) \geq \underline{a} - \delta t_0 + \tilde{\varepsilon}$ für alle $y \in \Omega$ und wegen $f(v(t_0)) \geq 0$

$$u_t(t_0,x_0) = (\delta t_0 + \tilde{\varepsilon})(1 - \int_\Omega m(x_0,y)dy) \geq 0 > -\delta = v'(t_0).$$

Da $\delta, \tilde{\varepsilon}$ beliebig klein gewählt werden können, folgt damit aus Korollar 2 die Behauptung.

Korollar 3 Sei $u \in C_T$ eine Lösung von (2.1) (bzw. von (2.3)). Dann bleiben die Aussagen von Satz 3 gültig, wenn man die Bedingungen an f durch die schwächeren Forderungen $f(\underline{A}) \geq 0$ bzw. $f(\overline{A}) \leq 0$ in i) (bzw. $f(\underline{a}) \geq 0$, $f(\overline{a}) \leq 0$ in ii)) ersetzt.

Beweis: Erfüllt f die Bedingungen von Satz 3 nicht, so ändert man f außerhalb des Intervalls $[\underline{A},\overline{A}]$ (bzw. $[\underline{a},\overline{a}]$) ab, indem man durch die Konstanten $f(\underline{A})$, $f(\overline{A})$ (bzw. $f(\underline{a})$, $f(\overline{a})$ ) stetig fortsetzt. Dieses abgeänderte $\tilde{f}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 3. Da die zugehörige Lösung $\tilde{u}$ beschränkt bleibt und f und $\tilde{f}$ im Bildbereich von $\tilde{u}$ übereinstimmen, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung die Behauptung. □

Der folgende Satz entspricht dem starken Maximum-Prinzip für parabolische Differentialgleichungen.

Satz 4

i) u, $\underline{A}$ und $\overline{A}$ seien definiert wie in Satz 3i), und X sei $u_o$-positiv. Weiter gelte $Pu \geq 0$ ($Pu \leq 0$), und es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \geq 0$ ($f(w) \leq 0$) für $\underline{A} - \varepsilon < w < \underline{A} + \varepsilon$ ($\overline{A} - \varepsilon < w < \overline{A} + \varepsilon$). Dann ist $u \geq \underline{A}$ ($u \leq \overline{A}$) in G, und gilt $u(\overline{t},\overline{x}) = \underline{A}$ ($u(\overline{t},\overline{x}) = \overline{A}$) in einem Punkt $(\overline{t},\overline{x}) \in (0,T] \times \Omega$, so ist $u = \underline{A}$ ($u = \overline{A}$) in $(0,\overline{t}] \times \Omega$, wegen der Stetigkeit von u dann auch in $[0,\overline{t}] \times \Omega$.

ii) u, $\underline{a}$ und $\overline{a}$ seien definiert wie in Satz 3ii), und M sei stark positiv. Weiter gelte $Qu \geq 0$ ($Qu \leq 0$), und es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \geq 0$ ($f(w) \leq 0$) für $\underline{a} - \varepsilon < w < \underline{a} + \varepsilon$ ($\overline{a} - \varepsilon < w < \overline{a} + \varepsilon$). Dann ist $u \geq \underline{a}$ ($u \leq \overline{a}$) in G, und gilt $u(\overline{t},\overline{x}) = \underline{a}$ ($u(\overline{t},\overline{x}) = \overline{a}$) in einem Punkt $(\overline{t},\overline{x}) \in (0,T] \times \Omega$, so ist $u = \underline{a}$ ($u = \overline{a}$) in $(0,\overline{t}] \times \Omega$, wegen der Stetigkeit von u dann auch in $[0,\overline{t}] \times \Omega$.

Beweis: Wir beweisen die erste Aussage von ii).

Aus Satz 3 folgt $u \geq \underline{a}$ in G.

Es ist $u_t(\overline{t},\overline{x}) \leq 0$. Wegen $f(u(\overline{t},\overline{x})) \geq 0$ und $Qu \geq 0$ folgt

$$0 \geq u_t(\overline{t},\overline{x}) - f(u(\overline{t},\overline{x}))$$

$$\geq \int_{\Omega} m(\overline{x},y)u(\overline{t},y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(\overline{x},z)\psi(z)dz - u(\overline{t},\overline{x}),$$

also $\quad 0 = u(\overline{t},\overline{x}) - \underline{a}$

$$\geq \int_{\Omega} m(\overline{x},y)(u(\overline{t},y) - \underline{a})dy + \int_{\widetilde{\Omega}} m(\overline{x},z)(\psi(z) - \underline{a})dz \quad ,$$

und wegen $\psi(z) \geq \underline{a}$ ergibt sich

$$\int_{\Omega} m(\overline{x},y)(u(\overline{t},y) - \underline{a})dy \leq 0 \quad .$$

Aus $u(\overline{t},y) \geq \underline{a}$ und $m \geq 0$ erhält man für alle $x \in \Omega$ mit $u(\overline{t},x) = \underline{a}$

$$\int_{\Omega} m(x,y)(u(\overline{t},y) - \underline{a})dy = 0 \quad .$$

Angenommen, es gibt ein $\overline{y} \in \Omega$ mit $u(\overline{t},\overline{y}) > \underline{a}$ .

Wir definieren $U := \{y \in \Omega : u(\overline{t},y) > \underline{a}\}$ . Dann ist $m(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \Omega \setminus U \times U$. Damit erhält man einen Widerspruch zur starken Positivität von M (vgl. den Beweis zu II Satz 10).

Es gilt somit : $u(\overline{t},x) = \underline{a}$ für alle $x \in \Omega$.

Angenommen, es gibt ein $t_o < \overline{t}$ und ein $x_o \in \Omega$ mit $u(t_o,x_o) > \underline{a}$, dann ist $u(t_o,x) > \underline{a}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir betrachten den Zylinder $R := [t_o,\overline{t}\,] \times \Omega$.

Es seien $\delta,\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \delta, \rho < \varepsilon$, $w(t) := \exp(-t)$. Dann gilt $\delta - \rho\, w(\overline{t} - t_o) < \varepsilon$, $\rho - \delta < \varepsilon$; die Funktion $\phi(t)$ sei für $t \in [t_o,\overline{t}\,]$ folgendermaßen definiert:

$$\phi(t) := \underline{a} - \delta + \rho w(t - t_o) \quad .$$

$\rho$ sei so klein gewählt, daß $\underline{a} + \rho\, w(0) = u(t_o,x)$ gilt, also $\phi < u$ für $t = t_o$.

Wegen $w(t - t_o) \leq 1$ erhält man

$$\underline{a} - \varepsilon < \underline{a} - \delta + \rho\, w(\overline{t} - t_o) \leq \phi(t) = \underline{a} - \delta + \rho < \underline{a} + \varepsilon$$

für alle $(t,x) \in R$.

Wir setzen $h(x) := \int_{\Omega} m(x,y)dy$ .

Dann gilt wegen $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz = 1 - h(x)$ und $f(\phi(t)) \geq 0$ für alle $(t,x) \in R$

$$\int_{\Omega} m(x,y)\phi(t)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz - \phi(t) + f(\phi(t))$$

$$= (\underline{a} - \delta + \varrho w(t - t_o))h(x) + \underline{a}(1 - h(x)) - \underline{a} + \delta - \varrho w(t - t_o)$$

$$= \left[\delta(1 - h(x)) + \varrho w(t - t_o)h(x)\right] - \varrho w(t - t_o)$$

$$> - \varrho w(t - t_o).$$

Mit $\phi'(t) = - \varrho w(t - t_o)$ folgt daraus für alle $(t,x) \in R$

$$\phi'(t) < \int_{\Omega} m(x,y)\phi(t)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz - \phi(t) + f(\phi(t)). \tag{3.1}$$

Ist $u(t_1,x_1) = \phi(t_1)$ für ein $(t_1,x_1) \in R$ und $u(t,x) > \phi(t)$ für alle $(t,x) \in R \cap [t_o,t_1) \times \Omega$ , so ergibt sich mit (3.1)

$$\phi'(t_1) < \int_{\Omega} m(x_1,y)u(t_1,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x_1,z)\psi(z)dz - u(t_1x_1)$$
$$f(u(t_1,x_1)).$$

Wegen $Qu \geq 0$ ist demnach $u_t(t_1,x_1) > \phi'(t_1)$.

Da $\delta$ beliebig war, erhält man mit Korollar 2, angewandt auf R statt auf G, $\underline{a} + \varrho w = u$ in R, insbesondere also $\underline{a} < u$ in R. Dies ist aber ein Widerspruch zu $u(\bar{t},x) = \underline{a}$.

Die übrigen Aussagen des Satzes beweist man analog. □

Anmerkung 2 Im Gegensatz zum starken Maximum-Prinzip für parabolische Differentialgleichungen gilt Satz 4 auch dann, wenn $(\bar{t},\bar{x})$ auf dem Rand von G liegt (dies ist wichtig für einige Sätze des nächsten Abschnittes).

Korollar 4 Sei $u \in C_T$ eine Lösung von (2.1) (bzw. von (2.3)). Dann bleiben die Aussagen von Satz 4 gültig, wenn man die Bedingungen an f durch die folgende schwächere Forderung ersetzt: Es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \geq 0$ $(f(w) \leq 0)$ für $\underline{A} \leq w < \underline{A} + \varepsilon$ $(\overline{A} - \varepsilon < w \leq \overline{A})$ ( analog für Satz 4 ii)).

Beweis: s. den Beweis zu Korollar 3.

Anmerkung 3 Ist $f = f(x,u)$, $x \in \Omega$, dann lassen sich die Sätze 2-4 auf diesen Fall übertragen, wenn f die Voraussetzungen in Abschnitt 1b) und den obigen Sätzen jeweils für alle x erfüllt und die Lipschitz-Konstante unabhängig von x ist.

Anmerkung 4 Mit Satz 3 folgt, daß die Lösungen der Gleichungen (2.1) und (2.3) beschränkt sind.

## 4. Stationäre Lösungen der linearen Gleichungen: Existenz- und Konvergenzsätze

### a) Das Neumann-Problem

Gegeben sei das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) \quad , \\ u(0,x) &= u^0(x) \quad . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir werden jetzt wieder stärker betonen, daß u die Dichte einer Population ist. (4.1) beschreibt dann reine Migration ohne Berücksichtigung von Reproduktionsvorgängen. Entsprechend unserem biologischen Modell sind wir im folgenden ausschließlich an nichtnegativen Funktionen u interessiert. Aus Satz 3 folgt für Lösungen u von (4.1):

$$u^0 \geq 0 \implies u \geq 0.$$

Lemma 4 Sei $u^0 \in \mathcal{K}_0$. Dann bleibt die Gesamtmasse einer Population, deren Dichte eine Lösung der Gleichung (4.1) ist, konstant.

Beweis: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von 1b) gilt

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t(t) &= \int_\Omega c(x)u_t(t,x)dx \\ &= \int_\Omega c(x)\left(\int_\Omega c^{-1}(x)\varkappa(x,y)c(y)u(t,y)dy - u(t,x)\right)dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \varkappa(x,y)dx\right)c(y)u(t,y)dy - \int_\Omega c(x)u(t,x)dx \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt $\tilde{U}(t) = \tilde{U}(0) =: \tilde{U}$, und wegen $\tilde{u}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{\mathcal{C}}$ erhält man

$$\tilde{u}(t) = \frac{\tilde{U}}{\mathcal{C}} =: \tilde{u} \quad . \tag{4.2}$$

Stationäre Lösungen von (4.1) sind Lösungen der Gleichung

$$\int_{\Omega} k(x,y)u(y)dy = u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \tag{4.3}$$

bzw. $Ku = u$ .

Da dies gleichzeitig die stationäre Gleichung des Problems (II 1.5) ist, können wir die Ergebnisse aus Abschnitt II 2a) übernehmen und erhalten den

Satz 5 Ist K $u_o$-beschränkt, so ist die Funktion $\mathbf{1}_X$ bis auf skalare Faktoren die einzige Eigenfunktion von K in $\mathcal{K}_o$. Der zugehörige Eigenwert 1 ist einfach und betragsmäßig größer als alle anderen Eigenwerte.

Der Beweis ergibt sich aus II Lemma 1, II Satz 1 und II Satz 2.

Mit (4.2) folgt, daß die Funktionen $\tilde{u}\mathbf{1}_X$ die einzigen nichtnegativen stationären Lösungen der Anfangswertaufgabe (4.1) sind.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis des folgenden Konvergenzsatzes gewidmet:

Satz 6 Es sei K $u_o$-beschränkt und $u^o \in \mathcal{K}_o$. Dann gilt für die Lösung u der Gleichung (4.1)

$$\lim_{t \to \infty} \| u[t] - \tilde{u}\mathbf{1}_X \|_X = 0 \quad .$$

Beweis: Der Operator $Z \in \mathcal{L}(X)$, $Z := K - I$, ist beschränkt, erzeugt also eine gleichmäßig stetige (normstetige) Operatorenhalbgruppe $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, mit $T(t) = \exp(Zt)$. $u(t,x) = T(t)u^o(x)$ ist die eindeutige Lösung von (4.1). Es ist leicht zu sehen, daß

$$\|T(t)\| = 1$$

gilt.

Nach Satz 5 gilt

$$W_o := \text{Kern } Z = \left\{ d\mathbb{1}_X : d \in \mathbb{R} \right\} ,$$

d.h. Kern Z ist ein eindimensionaler, abgeschlossener Unterraum von X.

Aus Hille-Phillips, Korollar zu Theorem 10.3.3. und Theorem 10.3.3.

erhält man für $u \in X$

$$T(t)u - u = \int_0^t T(s)Zu\,ds = Z\left( \int_0^t T(s)u\,ds \right) .$$

Daraus folgt

$$W_o = \text{Kern } Z = \text{Fix } T(t) \quad \text{für alle } t \geq 0 ,$$

wobei Fix T(t) der Eigenraum von T(t) zum Eigenwert 1 ist .

Wir definieren

$$W := \left\{ w \in X : \int_\Omega c(x)w(x)dx = 0 \right\} .$$

Es ist $W = \text{Bild } Z$. Denn sei $w \in \text{Bild } Z$; dann existiert ein $u \in X$ mit

$w(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)dy - u(x)$ , woraus wegen $\int_\Omega \mu(x,y)dx = 1$ für

alle $x \in \Omega$ folgt

$$\int_\Omega c(x)w(x)dx = \int_\Omega \int_\Omega c^{-1}(x)c(x)\mu(x,y)c(y)u(y)dxdy - \int_\Omega c(x)u(x)dx = 0.$$

und somit $\text{Bild } Z \subset W$. Sei nun $w \in W$, $w \neq 0 \in X$. Wegen $\int_\Omega c(x)w(x)dx = 0$

und $c > 0$ hat man $w \neq \text{const.}$, d.h. $w \notin W_o$. Aus diesem Grunde existiert

$(K - I)^{-1}w$, und man erhält $W \subset \text{Bild } Z$; also ist $W = \text{Bild } Z$.

Wegen $W_o \cap W = \{0\}$ ergibt sich

$$X = W_o \oplus W = \text{Kern } Z \oplus \text{Bild } Z .$$

$W_o$ und W sind abgeschlossene, lineare Unterräume von X; demnach

existiert eine Projektion $P:X \to X$ mit

$$PX = W_o$$

und $(I - P)X = W$ bzw. Kern $P = W$ .

Auf W erhält man mit Satz 5 ( $\sigma(Z)$ ist das Spektrum von Z)

$$s(Z) := \sup \{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(Z)\} < 0 \quad .$$

Im Falle beschränkter Generatoren Z gilt

$$s(Z) < 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|T(t)\| = 0 \ .$$

Für den Beweis s. Nagel, Satz 2.18 und Satz 2.17.

Wegen $PW = 0$ und $PW_o = TW_o = W_o$ folgt

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t) - P\| = 0 \ .$$

Damit weiß man, daß u[t] für $t \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Konstante konvergiert. Mit (4.2) folgt die Behauptung.

b) Das Dirichlet-Problem

Die reine Migrationsgleichung mit Dirichlet-Bedingungen lautet

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_\Omega m(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz - u(t,x) \ , \\ u(0,x) &= u^o(x) \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aus Satz 3 folgt für die Lösungen u von (4.4):

$$u^o \geq 0 \ , \quad \psi \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \ .$$

Die zu (4.4) gehörende stationäre Gleichung ist

$$\int_{\Omega} m(x,y)u(y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz = u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

bzw. $Mu + M\Psi = Mu + b = u$ .

Dies ist gleichzeitig die stationäre Gleichung des Problems (II 1.10), so daß wir die Ergebnisse aus II 2b) übernehmen können.

Damit erhalten wir den

Satz 7 Es sei M $u_o$-beschränkt. Dann ist $r(M) < 1$, und (4.4) hat genau eine stationäre Lösung

$$u_s := (I - M)^{-1}b = (I - M)^{-1}M\Psi .$$

Weiter gilt

$$\inf_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\} \mathbf{1}_X \leq u_s \leq \sup_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\} \mathbf{1}_X .$$

Ist M stark positiv, $\Psi \geq 0$ und $b \neq 0$, dann ist $u_s > 0$, und falls ein $x_o \in \Omega$ existiert mit $u(x_o) = \sup_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\}$ $(u(x_o) = \inf_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\})$, dann ist $u = \sup_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\} \mathbf{1}_X$ $(u = \inf_{z \in \tilde{\Omega}} \{\Psi(z)\} \mathbf{1}_X)$ .

Der Beweis ergibt sich aus II Satz 8 und dem I Lemma 3 entsprechenden Satz für vollstetige Operatoren sowie II Satz 10.

Satz 8 Ist M $u_o$-beschränkt, dann gilt für die Lösungen der Gleichung (4.4):

$$\lim_{t \to \infty} \| u[t] - u_s \|_X = 0.$$

Beweis: Der Operator $\tilde{Z} \in \mathcal{L}(X)$, $\tilde{Z} := M - I$ erzeugt eine gleichmäßig stetige Operatoren-Halbgruppe $\{\tilde{T}(t)\}$, $t \geq 0$, mit $\tilde{T}(t) = \exp(Zt)$. Es ist $r(\tilde{Z}) < 0$, da aus der $u_o$-Beschränktheit von M folgt, daß $r(M) < 1$ ist.

Nach der Formel für die Variation der Konstanten (Belleni-Morante, Theorem 4.8, S.167) läßt sich zu einem festen $u^0$ die Lösung von (4.4) folgendermaßen darstellen:

$$u[t] = \tilde{T}(t)u^0 + \int_0^t \tilde{T}(t-s)b\,ds \quad , \quad t \geq 0 \, .$$

Daraus erhält man

$$u[t] = \exp(\tilde{Z}t)(u^0 + \tilde{Z}^{-1}b) + (I - M)^{-1}b.$$

Wegen $r(\tilde{Z}) < 0$ ist $\lim_{t \to \infty} \| \exp(Zt) \| = 0$; damit folgt die Behauptung.

## 5. Stationäre Lösungen der semilinearen Gleichungen:

### Existenz- und Konvergenzsätze

Zusätzlich zu den in 1b) formulierten Voraussetzungen erfülle die Funktion f in diesem Abschnitt die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &f(0) = f(1) = 0 \quad , \\ &f(u) > 0 \quad \text{für } 0 < u < 1 \quad , \\ &f(u) < 0 \quad \text{für } u > 1 \, . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Für unser biologisches Modell bedeuten diese Bedingungen, daß die durch f beschriebene Änderung der Populationsdichte einem logistischen Gesetz unterworfen ist (vgl. die Definition der Funktion g in I (3.3)).

Selbstverständlich sind andere Beschreibungen des Populationswachstums möglich. Wir werden uns hier auf diesen Fall konzentrieren, da er biologisch sinnvoll erscheint und man an seinem Beispiel sehr klar darstellen kann, wie die Eigenschaften der Funktion f in die Beweise eingehen.

### a) Das Neumann-Problem

Zunächst betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) + f(u(t,x)) \, , \\ &u(0,x) = u^0(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aus (5.1) ergibt sich, daß die Funktionen 0 und $\mathbb{1}_X$ stationäre Lösungen von (2.1) sind.

Es gilt der folgende

Satz 9 Sei $u^o \in \mathcal{K}_o$, $u^o \neq 0$; sei u die Lösung von (2.1) und K $u_o$-positiv. Dann ist $\lim_{t \to \infty} \|u[t] - \mathbb{1}_X\|_X = 0$.

Beweis: Für $u^o = \mathbb{1}_X$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

i) Es sei $0 \leq u^o \leq \mathbb{1}_X$, $u^o \neq \mathbb{1}_X$.

Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \Omega$ ist $u(\varepsilon, x) > 0$; denn angenommen, es gibt $\bar{\varepsilon} > 0$, $\bar{x} \in \Omega$ mit $u(\bar{\varepsilon}, \bar{x}) = 0$ ($u \geq 0$ folgt aus Satz 3), dann ist wegen Satz 4 $u(t,x) = 0$ für alle t mit $0 \leq t \leq \bar{\varepsilon}$ und alle $x \in \Omega$. Das aber ist ein Widerspruch zu $u^o \neq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Da $\Omega$ kompakt ist, hat man

$$\delta := \min_{x \in \Omega} \{u(\varepsilon, x)\} > 0 \quad . \tag{5.2}$$

$\underline{u}(t)$, $t \geq \varepsilon$, sei die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\underline{u}} = f(\underline{u})$ mit $\underline{u}(\varepsilon) := \delta$. Als nur von t abhängige Funktion ist $\underline{u}$ auch Lösung von (2.1) mit der entsprechenden Anfangsbedingung für $t = \varepsilon$. Mit Satz 2 und (5.2) erhält man

$$u(t,x) \geq \underline{u}(t) \quad \text{für alle } t \geq \varepsilon \text{ und alle } x \in \Omega . \tag{5.3}$$

Weiter ergibt sich mit Satz 3, daß $\delta \leq 1$ und $\underline{u} \leq 1$ gilt. Aus $f(\underline{u}(t)) > 0$ für $0 < \underline{u}(t) < 1$ und $f(1) = 0$ folgt, daß entweder $\underline{u}(t)$ streng monoton wachsend ist für alle $t \geq 0$ oder daß ein $t_o \geq \varepsilon$ existiert, so daß $\underline{u}(t)$ streng monoton wachsend ist für alle t mit $\varepsilon \leq t \leq t_o$ und $\underline{u}(t) = 1$ gilt für alle $t \geq t_o$. Wegen $u \leq 1$ und (5.3) ist die Behauptung damit für $u^o \leq 1$ bewiesen, denn $\underline{u}$ ist unabhängig von t, die Konvergenz von $u(t,x)$ für $t \to \infty$ ist somit gleichmäßig.

ii) Es sei $u^o \geq 1_X$, $u^o \neq 1_X$; dann ist $1 < d := \max_{x \in \Omega} \{u^o(x)\}$ .

$\bar{u}(t)$ sei die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\bar{u}} = f(\bar{u})$, $\bar{u}(0) = d$.

Wie in i) folgt $\bar{u}(t) \geq u(t,x)$, $\bar{u}(t) \geq 1$ und $u(t,x) \geq 1$ für alle $t \geq 0$ und alle $x \in \Omega$ . Wegen $f(\bar{u}(t)) < 0$ für $\bar{u}(t) > 1$ und $f(1) = 0$ ist $\bar{u}$ entweder streng monoton fallend für alle $t \geq 0$ oder es gibt ein $t_o > 0$, so daß $\bar{u}$ streng monoton fallend ist für $t \leq t_o$ und $\bar{u}(t) = 1$ ist für $t \geq t_o$. Damit erhält man die Behauptung für $u^o \geq 1_X$.

iii) Gibt es $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $0 \leq u^o(x_1) < 1 < u^o(x_2)$, so folgt mit i) und ii) $\underline{u}(t) \leq u(t,x) \leq \bar{u}(t)$ für alle $t \geq \varepsilon$ , $x \in \Omega$ .

Satz 9 ist somit bewiesen.

Korollar 5 Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 9 gelte $f = f(x,u)$, $x \in \Omega$, und f erfülle die Bedingungen in 1b) und (5.1) jeweils für alle x (wegen der Kompaktheit von $\Omega$ also gleichmäßig in x). Die Lipschitz-Konstante F sei unabhängig von x.

Dann gilt $\lim_{t \to \infty} |u[t] - 1_X|_X = 0$.

Beweis:

i) Wir zeigen zunächst, daß $\underline{f}(u) := \inf_{x \in \Omega} \{f(x,u)\}$ Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitz-Konstanten F.

Es gilt

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq F|u - v| \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ u, v \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

$f(x,u)$ nehme sein Infimum bzgl. x in $x(u)$ und $f(x,v)$ sein Infimum in $x(v)$ an. Mit (5.4) folgt

$$f(x(u),u) \geq f(x(u),v) - F|u - v| \geq \inf_{x \in \Omega} \{f(x,v)\} - F|u - v| .$$

Wegen $f(x(u),u) = \underline{f}(u)$ erhält man

$$\underline{f}(u) - \underline{f}(v) \geq -F|u - v| .$$

Aus $f(x(v),u) \leq f(x(v),v) + F|u - v|$ ergibt sich ebenso

$$\underline{f}(u) - \underline{f}(v) \leq F|u - v| \ .$$

Im folgenden gehen wir vor wie im Beweis zu Satz 9.

ii) Sei $u^0 \leq \mathbb{1}_X$, $u^0 \neq \mathbb{1}_X$. (Der Fall $u^0 = \mathbb{1}_X$ ist trivial.) $\underline{u}(t)$ sei nun Lösung der Differentialgleichung $\dot{\underline{u}} = \underline{f}(\underline{u})$, $t \geq \varepsilon$, $\underline{u}(\varepsilon) = \delta$. Es ist

$$(P\underline{u})(t,x) = \dot{\underline{u}}(t) - \int_\Omega k(x,y)\underline{u}(t)dy + \underline{u}(t) - f(x,\underline{u}(t))$$
$$\leq \dot{\underline{u}}(t) - \underline{f}(\underline{u}) = 0 \ ,$$

also $P\underline{u} \leq Pu$. Die Sätze 3 und 4 sind demnach auch hier anwendbar. Da außerdem $\underline{f}(\underline{u}) = \inf_{x \in \Omega} \{f(x,\underline{u})\} > 0$ ist, kann man den Beweis von Satz 9, Teil i) auf diesen Fall übertragen.

iii) Sei $u^0 \geq \mathbb{1}_X$, $u^0 \neq \mathbb{1}_X$. Definiert man $\overline{f}(u) := \sup_{x \in \Omega} \{f(x,u)\}$, so kann man wie in i) zeigen, daß $\overline{f}$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten F ist. $\overline{u}$ sei jetzt die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\overline{u}} = \overline{f}(\overline{u})$, $\overline{u}(0) = d$. Es ist $P\overline{u} \geq \dot{\overline{u}} - \overline{f}(\overline{u}) = 0$, also $P\overline{u} \geq Pu$, und für $\overline{u} > 1$ ist $\overline{f}(\overline{u}) < 0$. Die Behauptung des Korollars erhält man nun analog zu Satz 9.

b) Das Dirichlet-Problem

Für die semi-lineare Anfangswertaufgabe mit Dirichlet-Bedingungen

$$u_t(t,x) = \int_\Omega m(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz - u(t,x) + f(u(t,x)), \qquad (2.3)$$
$$u(0,x) = u^0(x)$$

ist die Frage nach der Existenz stationärer Lösungen und ihrer Eindeutigkeit sowie die Frage nach der Konvergenz der

Lösungen von (2.3) sehr viel schwieriger zu beantworten als für das Neumann-Problem.

Zunächst betrachten wir einen einfachen Spezialfall, für den die Antwort mit den im Beweis zu Satz 9 benutzten Methoden gegeben werden kann.

Im folgenden sei immer vorausgesetzt, daß f den Bedingungen (5.1) genügt.

Satz 10 M sei stark positiv, und es gelte $u^0 \geq 0$, $u^0 \neq 0$ und $\Psi = \mathbb{1}_Y$. Dann ist $\mathbb{1}_X$ eine stationäre Lösung von (2.3), und es folgt

$$\lim_{t \to \infty} \|u[t] - \mathbb{1}_X\|_X = 0 \ .$$

Beweis: Daß $\mathbb{1}_X$ eine stationäre Lösung von (2.3) ist und aus $u^0 = \mathbb{1}_X$ die Behauptung folgt, ist klar.

i) Sei $u^0 \leq \mathbb{1}_X$, $u^0 \neq \mathbb{1}_X$. Wie im Beweis zu Satz 9 kann man zeigen: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest, so ist $1 \geq \delta := \min_{x \in \Omega} \{u(\varepsilon, x)\} > 0$. $\underline{u}(t)$ sei wieder die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\underline{u}} = f(\underline{u})$, $\underline{u}(\varepsilon) = \delta$. Da $\underline{u}$ gleichzeitig Lösung des Neumann-Problems (2.1) mit der entsprechenden Anfangsbedingung ist, erhält man mit Satz 3 $\underline{u}(t) \leq 1$ für alle $t \geq \varepsilon$.

Weiter gilt

$$(Q_{\mathbb{1}_Y}\underline{u})(t,x) = \dot{\underline{u}}(t) - \Big(\int_\Omega m(x,y)\underline{u}(t)dy - \underline{u}(t)\Big) - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\mathbb{1}_Y dz - f(\underline{u}(t))$$

$$= -\Big(\int_\Omega m(x,y)dy - 1\Big)\underline{u}(t) - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz$$

$$\leq 0 \ .$$

Wegen $Q_{\mathbb{1}_Y}\underline{u} \leq Q_{\mathbb{1}_Y}u$ und $\underline{u}(\varepsilon) \leq u(\varepsilon, x)$ folgt mit Satz 2 $\underline{u}(t) \leq u(t,x)$

für alle $t \geq \varepsilon$ und alle $x \in \Omega$. Wie im Beweis zu Satz 9 folgt daraus die Behauptung für $u^o \leq \mathbb{1}_X$.

ii) Ist $u^o \geq \mathbb{1}_X$, $u^o \neq \mathbb{1}_X$, dann kann man d wie im Falle des Neumann-Problems definieren. Die Behauptung folgt wie oben, wenn man beachtet, daß $\bar{u}$ gleichzeitig Lösung des Neumann-Problems ist. und daß $Q_{\mathbb{1}_Y} \bar{u} \geq Q_{\mathbb{1}_Y} u$ gilt.

iii) s. Beweis zu Satz 9, Teil iii).

Anmerkung 5 Ist $f = f(x,u)$, $x \in \Omega$, so läßt sich Korollar 2 sinngemäß auf die Lösungen des Dirichlet-Problems übertragen ( vgl. Korollar 3).

Anmerkung 6 Für $\Psi = 0$ ist $0 \in \mathcal{K}_o$ eine stationäre Lösung von (2.3); sie ist aber nur für $u^o = 0$ stabil.

Es stellt sich nun die Frage nach der Existenz stationärer Lösungen des allgemeinen Problems (2.3), d.h. nach Lösungen der Gleichung

$$\int_\Omega m(x,y)u(y)dy + b(x) + f(u(x)) = u(x) \quad . \tag{5.5}$$

Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ definiert durch

$$(\mathcal{F}u)(x) := (Mu)(x) + b(x) + f(u(x)) \quad .$$

Gesucht sind also Fixpunkte $u_s \in \mathcal{K}_o$ des Operators $\mathcal{F}$.

Zunächst einige Hilfsmittel:

Definition 3 (Eisenack/Fenske S.90)

Sei $(\mathcal{A},d)$ ein metrischer Raum, $B \subset \mathcal{A}$ beschränkt.

$\chi(B)$, das Maß der Nichtkompaktheit von B, sei das Infimum aller $\varepsilon > 0$, für die B eine endliche Überdeckung durch Mengen vom Durchmesser (höchstens) $\varepsilon$ besitzt.

Definition 4 (a.a.O.)

Sind $(\mathcal{A}_1, d_1)$, $(\mathcal{A}_2, d_2)$ metrische Räume, $\alpha \geq 0$, so bezeichne $\mathcal{S}_\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ die Menge der stetigen Abbildungen $R: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, für die gilt: Für jede beschränkte Menge $B \subset \mathcal{A}_1$ ist $R(B)$ beschränkt und $\chi(R(B)) \leq \alpha \chi(B)$. Abbildungen aus $\mathcal{S}_\alpha$ heißen $\alpha$-verdichtend.
Eine Abbildung $R: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ heißt Lipschitz-beschränkt mit der Lipschitz-Konstanten $\alpha$, wenn für alle $x, y \in \mathcal{A}_1$ gilt: $d_2(Rx, Ry) \leq \alpha d_1(x, y)$.

Es gilt (Eisenack/Fenske S.91): Für $R \in \mathcal{S}_\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ und $S \in \mathcal{S}_\beta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ hat man $R + S \in \mathcal{S}_{\alpha+\beta}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.
Ist insbesondere R kompakt und besitzt S die Lipschitz-Konstante $\alpha$, so folgt $R + S \in \mathcal{S}_\alpha(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, denn aus $d_2(Sx, Sy) \leq \alpha d_1(x, y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}_1$ folgt $\chi(S(B)) \leq \alpha \chi(B)$ für jede beschränkte Menge $B \subset \mathcal{A}_1$.

Der folgende Fixpunktsatz ist eine Verallgemeinerung des Schauderschen Satzes auf verdichtende Operatoren.

Satz 11 (Eisenack/Fenske, Satz 5.5.4, S.130)
Sei E ein Banachraum, $B \subset E$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex, $0 \leq \alpha < 1$, $A \in \mathcal{S}_\alpha(B, B)$.
Dann hat A einen Fixpunkt in B.

Setzen wir in unserem Fall E = X, $\alpha$ = F, R = M, S = N, wobei $(Nu)(x) := b(x) + f(u(x))$ sei, $\mathcal{F} = M + N$ und fordern wir $F < 1$, dann ist Satz 11 anwendbar, falls wir $\mathcal{F}(B) \subset B$ für eine entsprechende Menge B zeigen können.

Satz 12 Es seien $u^0 \geq 0$, $\psi \geq 0$; f sei stetig differenzierbar in $\mathbb{R}_+$, und es gelte

$$\sup \{ |f'(u)| : u \in [0, \infty) \} < 1 \quad . \tag{5.6}$$

Dann besitzt (5.5) mindestens eine Lösung $u_{s\ o}$.

Beweis: Für ein beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}_+$ ist die Gleichung $u + \gamma u = \mathcal{F} u + \gamma u$ und damit auch

$$u(x) = (\mathcal{F}_\gamma u)(x) := \frac{1}{1+\gamma} \int_\Omega m(x,y)u(y)dy + \frac{1}{1+\gamma} b(x) + f_\gamma(u(x))$$

äquivalent zu (5.5), wenn man $f_\gamma(u) := \frac{f(u) + \gamma u}{1 + \gamma}$ setzt.

$\mathcal{F}_\gamma$ hat für alle $\gamma \geq 0$ dieselben Fixpunkte wie $\mathcal{F}$.

Ist $\gamma \geq 1$, so ist $f_\gamma$ monoton in u wegen $f'_\gamma(u) = \frac{f'(u) + \gamma}{1 + \gamma} > 0$.

Da M positiv ist ergibt sich: $\mathcal{F}_\gamma$ ist monoton bezüglich der Halbordnung für $\gamma \geq 1$.

Insbesondere gilt

$$u \geq 0 \implies \mathcal{F}_\gamma u \geq \mathcal{F}_\gamma (0) \geq 0. \tag{5.7}$$

Wir definieren $\overline{\psi} := \sup_{z \in \bar{\Omega}} \{\psi(z)\}$ und $\tilde{\psi} := \max \{\overline{\psi}, 1\}$.

Sei $B := \{u \in \mathcal{K}_o : 0 \leq u \leq \tilde{\psi} 1_X\}$ , $\gamma \geq 1$.

Dann gilt für alle $u \in B$

$$\mathcal{F}_\gamma u \leq \tilde{\psi} 1_X \ , \tag{5.8}$$

denn es ist wegen $f(u) \leq 0$ für $u \geq 1$

$$\mathcal{F}_\gamma u \leq \mathcal{F}_\gamma \tilde{\psi} 1_X \leq \frac{1}{1+\gamma} \tilde{\psi} 1_X + f_\gamma(\tilde{\psi}) 1_X \leq \tilde{\psi} 1_X.$$

Mit Satz 11 folgt die Behauptung.

Aussagen über die Konvergenz der Lösungen von (2.3) sind ohne weitere Voraussetzungen nicht möglich.

Wie für das lineare Problem gilt auch für die Lösungen von (5.5) ein starkes Invarianzprinzip:

Satz 13 Sei $S := [a_o, b_o] \subset \mathbb{R}$, $f(a_o) \geq 0$, $f(b_o) \leq 0$, $\Psi(\tilde{\Omega}) \subset S$ und $u$ eine Lösung von (5.5) mit $u(\Omega) \subset S$. $M$ sei stark positiv. Existiert ein $x_o \in \Omega$ mit $u(x_o) = a_o$ $(u(x_o) = b_o)$, so folgt $u = a_o 1\!\!1_X$ $(u = b_o 1\!\!1_X)$.

Beweis: Im Punkte $x_o$ hat man

$$a_o = u(x_o) = (Mu)(x_o) + (\tilde{M}\Psi)(x_o) + f(u(x_o)) \geq a_o.$$

Daraus erhält man $f(u(x_o)) = 0$ und $(Mu)(x_o) + (\tilde{M}\Psi)(x_o) = a_o$.
Wie im Beweis zu II Satz 10 ergibt sich wegen der starken Positivität von $M$ $u = a_o 1\!\!1_X$.
Die zweite Aussage des Satzes beweist man analog.

## IV. DIE SEMI-LINEAREN KONTINUIERLICHEN GLEICHUNGSSYSTEME

### 1a) Bezeichnungen und Voraussetzungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ zusammenhängend und kompakt, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^q$ die Vereinigung endlich vieler meßbarer, zusammenhängender Mengen, und seien die Räume $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ und $\mathbb{R}^n$ mit den jeweiligen euklidischen Normen $\|\cdot\|$ versehen. Es sei $X := C^n(\Omega)$ der Banachraum der auf $\Omega$ stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und der sup-Norm $\|\cdot\|_X$, d.h. für $u \in X$ gilt $\|u\|_X := \sup_{x \in \Omega} \|u(x)\|$; $Y := C_b^n(\tilde{\Omega})$ sei der Raum der auf $\tilde{\Omega}$ stetigen und beschränkten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und der sup-Norm $\|\cdot\|_Y$, und sei $C_T := C([0,T],X)$ der Banachraum der auf $[0,T] \subset \mathbb{R}_+$ stetigen Funktionen mit Werten in X und der Norm $\|u\|_{C_T} := \sup_{0 \le t \le T} \|u[t]\|_X$ (wird u als Element von $C_T$ betrachtet, so schreiben wir $u[t](x)$ statt $u(t,x)$). Wir definieren wieder $G := [0,T] \times \Omega$.

$\mathcal{K}(x\,y)$ sei für jedes $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ eine positive Diagonalmatrix, $\mathcal{K}: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+^{n^2}$. Für jedes ihrer Diagonalelemente $k_i(x,y)$, $1 \le i \le n$, $k_i: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, gelte: $k_i$ ist stetig, und es ist $\int_\Omega k_i(x,y)dy = 1$ für alle $x \in \Omega$. Zu jedem i gebe es eine strikt positive, stetige Funktion $c_i: \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_\Omega c_i(x)k_i(x,y)dx = c_i(y)$ für alle $y \in \Omega$. $K \in \mathcal{L}(X)$ sei der durch den Kern $\mathcal{K}(x,y)$ erzeugte Integraloperator, $K_i \in \mathcal{L}(C(\Omega))$ der durch $k_i$ erzeugte Intagraloperator. $K_i$ heißt die 'i-te Komponente von K'.

Gilt $k_i = k_j$ für alle $i,j$, $1 \le i,j \le n$, dann nennen wir K 'skalar erzeugt'.

$\mathcal{M}(x,y): \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+^{n^2}$ und $\tilde{\mathcal{M}}(x,z): \Omega \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+^{n^2}$ seien für jedes $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ bzw. $(x,z) \in \Omega \times \tilde{\Omega}$ positive Diagonalmatrizen. Für die Diagonalelemente $m_i: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ bzw. $\tilde{m}_i: \Omega \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+$, $1 \le i \le n$, gelte: $m_i$ und $\tilde{m}_i$ sind stetig, $\tilde{m}_i$ hat kompakten Träger, und es ist für alle $x \in \Omega$

$$\int_\Omega m_i(x,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}_i(x,z)dz = 1.$$

Zu jedem i existiere ein $x \in \Omega$ mit $\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}_i(x,z)dz > 0$.

M und $\tilde{M}$ seien die durch die Kerne $\mathcal{M}$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}$ erzeugten Integraloperatoren aus $\mathcal{L}(X)$ bzw. $\mathcal{L}(Y,X)$, $M_i$ und $\tilde{M}_i$ die von $m_i$ bzw. $\tilde{m}_i$ erzeugten Komponenten von M bzw. $\tilde{M}$. M und $\tilde{M}$ heißen 'skalar erzeugt', wenn

$m_i = m_j$ und $\tilde{m}_i = \tilde{m}_j$ für alle $i,j$, $1 \leq i,j \leq n$.

Wir nennen K bzw. M $u_o$-beschränkt oder stark positiv, wenn jede Komponente von K bzw. M diese Eigenschaft besitzt.

Weiter sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit der globalen Lipschitz-Konstanten F.

Mit $\psi \in Y$ definieren wir für $x \in \Omega$

$$b(x) := \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathcal{M}}(x,z)\psi(z)dz \ .$$

Analog zu dem vorigen Kapitel nennen wir die semi-lineare Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_{\Omega} \mathcal{K}(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) + f(u(t,x)) \ , \\ u(0,x) &= u^o(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

das Neumann-Problem und

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_{\Omega} \mathcal{M}(x,y)u(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathcal{M}}(x,z)\psi(z)dz - u(t,x) \\ &\quad + f(u(t,x)) \ , \\ u(0,x) &= u^o(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

das Dirichlet-Problem.

b) Ein Existenzsatz

Es gilt

Satz 1 Für alle $T > 0$ und alle $u^0 \in X$ hat das System (1.1) bzw. (1.2) genau eine Lösung in $C_T$ ; sie ist stetig nach t differenzierbar und hängt stetig von den Anfangsdaten ab.

Beweis: Der Beweis des entsprechenden Satzes in Kapitel III (III Satz 1 und Korollar 1) läßt sich wörtlich übertragen.

Die Anmerkung 1 aus Kapitel III läßt sich auch auf diesen Fall übertragen.

## 2. Ein Invarianzprinzip

Der in diesem Abschnitt bewiesene Satz ist die Übertragung eines von H. Weinberger bewiesenen schwachen Invarianzprinzips für semi-lineare parabolische Differentialgleichungssysteme auf die hier untersuchten Gleichungen (s. Weinberger [1], Theorem 1).

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, und sei

$$S_\rho := \{w \in \mathbb{R}^n : \|w - u\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho \text{ für alle } u \in S\}$$

die Parallelmenge von S mit Abstand $\rho$ .

Lemma 1 $S_\rho$ ist kompakt und konvex.

Beweis: $S_\rho$ ist beschränkt; wir zeigen die Abgeschlossenheit.
Sei $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $S_\rho$ mit $\lim_{j \to \infty} u_j = u$.
Zu $(u_j)$ existiert eine Folge $(u_j')$ in S mit $\|u_j' - u_j\| \leq \rho$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da S kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(u_{j'})$ von $(u_j')$, die gegen $u' \in S$ konvergiert, und es gilt

$$\|u - u'\| \leq \|u - u_{j'}\| + \|u_{j'} - u_{j'}'\| + \|u_{j'}' - u'\| \quad .$$

Daraus folgt $u \in S_\rho$ und somit die Abgeschlossenheit von $S_\rho$ .
Seien $u, v \in S_\rho$ und $u' \in S$, dann ist $\|u - u'\| \leq \rho$ , $\|v - u'\| \leq \rho$ .
Damit erhält man für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\|\lambda u + (1 - \lambda)v - u'\| \leq \lambda \|u - u'\| + (1 - \lambda)\|v - u'\| \leq \rho \ ,$$

also ist $S_\rho$ konvex.

Lemma 2 Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes $\rho \in (0, \varepsilon)$ die Parallelmenge $S_\rho$ von S die folgende Eigenschaft hat: Ist p äußere Normale in einem Punkt $u^*$ auf dem Rand von $S_\rho$ , dann gilt $p \cdot f(u^*) < 0$. Weiter gelte $k_i = k_j =: k$, $m_i = m_j =: m$ und $\tilde{m}_i = \tilde{m}_j =: \tilde{m}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$,

d.h. $\mathcal{K}(x,y) = k(x,y)I$, $\mathcal{M}(x,y) = m(x,y)I$ und $\tilde{\mathcal{M}}(x,z) = \tilde{m}(x,z)I$ für skalare Funktionen k, m und $\tilde{m}$.

Dann folgt: Ist u eine Lösung von (1.1) oder (1.2) in G und liegen $u^0(x)$ und $\Psi(z)$ für alle $x \in \Omega$, $z \in \tilde{\Omega}$ in S, so ist $u(t,x) \in S$ für alle $(t,x) \in G$.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für Lösungen von (1.2) zu beweisen; denn ersetzt man im folgenden m durch k und fordert $\Psi(\tilde{\Omega}) = \emptyset$, dann erhält man die Behauptung für die Lösungen von (1.1).

Angenommen, für ein $(t,x) \in (0,T]\times\Omega$ ist $u(t,x)$ nicht in S. Dann ist $u(t,x)$ auch außerhalb von $S_\rho$ für ein $\rho \in (0,\varepsilon)$. Wegen der Stetigkeit von u gibt es (mindestens) einen Punkt $(t^*,x^*) \in (0,T] \times\Omega$, so daß $u(t,x) \in S_\rho$ für $(t,x) \in (0,t^*]\times\Omega$ und $u^* := u(t^*,x^*) \in \partial S_\rho$ ist. Sei p die äußere Normale an $\partial S_\rho$ in $u^*$. Nach Voraussetzung gilt

$$p\cdot f(u^*) < 0. \tag{2.1}$$

Andererseits nimmt die Funktion $p\cdot u(t,x)$ ihr Maximum in $(0,t^*]\times\Omega$ im Punkt $(t^*,x^*)$ an, da $S_\rho$ konvex ist. Deswegen hat man

$$\frac{\partial}{\partial t}(p\cdot u(t^*,x^*)) = p\cdot u_t(t^*,x^*) \geq 0.$$

Um einen Widerspruch zu (2.1) herzuleiten, genügt es demnach zu zeigen, daß

$$p\cdot u(t^*,x^*) - p\cdot\int_\Omega m(x^*,y)u(t^*,y)dy - p\cdot\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x^*,z)\Psi(z)dz \geq 0 \tag{2.2}$$

ist. Dazu braucht man, daß nach Voraussetzung gilt

$$p\cdot u(t^*,x^*) = \Big(\int_\Omega m(x^*,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x^*,z)dz\Big)p\cdot u(t^*,x^*) .$$

Es folgt

$$p\cdot u(t^*,x^*) - p\cdot\int_\Omega m(x^*,y)u(t^*,y)dy - p\cdot\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x^*,z)\Psi(z)dz \quad =$$

$$= \int_{\Omega} m(x^*,y)p\cdot\big(u(t^*,x^*) - u(t^*,y)\big)dy$$

$$+ \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x^*,z)p\cdot\big(u(t^*,x^*) - \Psi(z)\big)dz \quad \geq \quad 0 \ ,$$

denn wegen $u(t^*, y) \in S_\rho$ für alle $y \in \Omega$ und $\Psi(z) \in S \subset S_\rho$ für alle $z \in \tilde{\Omega}$ sind beide Integrale nichtnegativ.

Mit dem Widerspruch von (2.1) und (2.2) erhält man die Behauptung.

Satz 2 Es gelte: $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 2. S sei eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, daß für jede äußere Normale p an jeden Punkt $u^* \in \partial S$ $p\cdot f(u^*) \leq 0$ ist. $u(t,x)$ sei die eindeutig bestimmte Lösung von (1.1) bzw. (1.2) in G, und es seien $u^0(x) \in S$ und $\Psi(z) \in S$ für alle $x \in \Omega$, $z \in \tilde{\Omega}$. Dann folgt $u(t,x) \in S$ für alle $(t,x) \in G$.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für Lösungen von (1.2) zu beweisen. Zu jedem Punkt $w \in \mathbb{R}^n$ außerhalb von S gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $q(w) \in \partial S$, der w am nächsten liegt. $w - q(w)$ ist eine äußere Normale an $\partial S$ in $q(w)$. Wir definieren

$$g(w) := \begin{cases} f(w) & \text{für } w \in S \\ f(q(w)) - w + q(w) & \text{für } w \notin S \ . \end{cases}$$

g ist Lipschitz-stetig in w. Nach Voraussetzung gibt es in G eine eindeutige Lösung des Problems

$$w_t(t,x) = \int_{\Omega} m(x,y)w(t,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz - w(t,x) + g(w(t,x)),$$

$$w(0,x) = u(0,x) \ .$$

Ist $w^*$ ein Randpunkt einer Menge $S_\rho$, dann ist $p = w^* - q(w^*)$ eine äußere Normale an $\partial S$ in $q(w^*)$ und auch an $\partial S_\rho$ in $w^*$. Dies sieht

man folgendermaßen: Sei v ein Punkt aus $\partial S$. Man wähle einen äußeren Normalenvektor an $\partial S$ in v; dieser Vektor habe die Länge $\rho$, seinen Endpunkt nennen wir $w^*$ (v entspricht $q(w^*)$). Dann ist die Kugel $B_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : |v - x| \leq \rho\}$ eine Teilmenge von $S_\rho$, da $w - v$ Normalenvektor an $\partial S$ in v ist. Also ist die einzige Tangentialhyperebene an $S_\rho$ in $w^*$ die Tangentialhyperebene der Kugel $B_\rho$ in $w^*$. Daraus folgt, daß $w - v$ auch Normalenvektor an $\partial S_\rho$ in $w^*$ ist.
Damit erhält man

$$p \cdot g(w^*) = (w^* - q(w^*)) \cdot f(w^*) - |w^* - q(w^*)|^2 \leq -\rho^2.$$

Deshalb erfüllen die Mengen S die Bedingungen von Lemma 2 bezüglich g, und daraus folgt $w(t,x) \in S$ in G. Wegen $g(u) = f(u)$ für $u \in S$ ist w eine beschränkte Lösung von (1.2) mit derselben Anfangsbedingung wie u. Aus der Eindeutigkeit der Lösung erhält man die Behauptung.

Anmerkung 1 Unter den Voraussetzungen von Satz 2 folgt wie in Kapitel III (vgl. Anmerkung 4) die Beschränktheit der Lösungen von (1.1) und (1.2) in $[0, \infty) \times \Omega$.

## 3. Ein Konvergenzsatz für die Lösungen des Neumann-Problems

In diesem Abschnitt setzen wir wieder voraus, daß K skalar erzeugt ist, d.h. wir untersuchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) + f(u(t,x)) \quad , \\ u(0,x) &= u^0(x) \quad . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der folgende Satz beruht auf einem Ergebnis von K.Schumacher ([3]) .

Satz 3 Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Abschnitt 1a) gelte: Es gebe eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$, die die Bedingungen von Satz 2 erfüllt, und es sei $F < 1$.

Dann ist die Menge $D := \{u \in X: u(\Omega) \subset S\}$ invariant bezüglich (3.1). Ist u eine Lösung von (3.1) mit $u^0 \in X$, $u^0(\Omega) \subset S$, dann ist der Pfad $W := \{u[t]: t \geq 0\}$ präkompakt in X.

Beweis: Die Invarianz von D folgt aus Satz 2; insbesondere ist W gleichmäßig beschränkt. Sei

$$\gamma := \lim_{\delta \searrow 0} \left(\sup\{\|u(t,x_2) - u(t,x_1)\| : t \geq 0; x_1, x_2 \in \Omega \, , \, \|x_2 - x_1\| \leq \delta\}\right).$$

Aus der Beschränktheit von W ergibt sich $\gamma < \infty$ für alle $\delta > 0$.

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist W genau dann präkompakt, wenn $\gamma = 0$ gilt.

Um dies zu zeigen, schreibt man die Gleichung (3.1) in der Form

$$u_t(t,x) + u(t,x) = \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy + f(u(t,x))$$

und wendet für beliebig vorgegebenes $\tau > 0$ auf diese Gleichung die Formel für die Variation der Konstanten an:

$$\begin{aligned} u(t+\tau,x) &= \exp(-\tau)u(t,x) \\ &+ \int_0^\tau \exp(-(\tau-s))\left(\int_\Omega k(x,y)u(t+s)dy + f(u(t+s,x))\right)ds \end{aligned} \tag{3.2}$$

Indem man die für $x = x_2$ und $x = x_1$ erhaltenen Gleichungen (3.2) voneinander subtrahiert und voraussetzt, daß $\|x_2 - x_1\| \leq \delta$ gilt, erhält man

$$\|u(t+\tau,x_2) - u(t+\tau,x_1)\| \leq \exp(-\tau)\|u(t,x_2) - u(t,x_1)\|$$
$$+ (1 - \exp(-\tau))\Big|\int_\Omega (k(x_2,y) - k(x_1,y))dy\Big| \sup\{\|u[t]\| : t \geq 0\}$$
$$+ (1 - \exp(-\tau))\sup\{\|f(u(t,x_2)) - f(u(t,x_1))\| : t \geq 0,$$
$$x_1, x_2 \in \Omega\ , \|x_2 - x_1\| \leq \delta\} \quad .$$

Es ist

$$\sup\{\|u(t,x_2) - u(t,x_1)\| : t \geq 0\} \leq \sup\{\|u(t+\tau,x_2) - u(t+\tau,x_1)\| : t \geq 0\}$$
$$+ \sup\{\|u(s,x_2) - u(s,x_1)\| : s \in [0,\tau]\}$$

Damit erhält man

$$\sup\{\|u(t,x_2) - u(t,x_1)\| : t \geq 0\} \leq \exp(-\tau)\sup\{\|u(t,x_2) - u(t,x_1)\| : t \geq 0\}$$
$$+ (1 - \exp(-\tau))\Big|\int_\Omega (k(x_2,y) - k(x_1,y))dy\Big| \sup\{\|u[t]\| : t \geq 0\}$$
$$+ (1 - \exp(-\tau))\sup\{\|f(u(t,x_2)) - f(u(t,x_1))\| : t \geq 0;$$
$$x_1, x_2 \in \Omega\ , \|x_2 - x_1\| \leq \delta\}$$
$$+ \sup\{\|u(s,x_2) - u(s,x_1)\| : s \in [0,\tau]\}.$$

Beachtet man, daß für $\|x_2 - x_1\| \to 0$

$$\Big|\int_\Omega (k(x_2,y) - k(x_1,y))dy\Big| \sup\{\|u[t]\| : t \geq 0\} \to 0$$

und $\quad \sup\{\|u(s,x_2) - u(s,x_1)\| : s \in [0,\tau]\} \to 0$

gilt, dann gewinnt man die folgende Abschätzung:

$$\gamma \leq \exp(-\tau)\gamma + (1 - \exp(-\tau))\lim_{\delta \downarrow 0}\Big(\sup\big\{\|f(u(t,x_2)) - f(u(t,x_1))\| :$$

$$t \geq 0;\ x_1, x_2 \in \Omega\ ,\ \|x_2 - x_1\| \leq \delta\big\}. \qquad (3.3)$$

Wegen $F < 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $F \leq 1 - \varepsilon$. Damit erhält man aus (3.3)

$$\gamma \leq (1 - \varepsilon)\gamma\ ,$$

was nur für $\gamma = 0$ erfüllt sein kann. □

Die folgende Konvergenzaussage ist die Übertragung eines Ergebnisses von K.P.Hadeler ([2]) auf die Gleichung (3.1).

Satz 4 Es sei $F < 1$. Für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{u} = f(u) \qquad (3.4)$$

gebe es eine stetig differenzierbare Lyapunov-Funktion
$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h, es gelte

$$\nabla V \cdot f \leq 0\ ,$$
$$\nabla V \cdot f = 0 \Rightarrow f = 0.$$

V sei nach unten beschränkt und konvex, d.h. es sei für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla V(w)(v - w) \leq V(v) - V(w)\ .$$

Weiter erfülle V die Bedingung

$$\|u\| \to \infty \Rightarrow |V(u)| \to \infty\ . \qquad (3.5)$$

f habe nur isolierte Nullstellen.
Dann konvergiert die Lösung von (3.1) für jede Anfangsbedingung $u^0 \in X$ gegen eine stationäre Lösung von (3.4).

Beweis: Sei $u^0 \in X$ und u die zugehörige Lösung von (3.1).

Wir definieren

$$v(t,x) := V(u(t,x)) \quad .$$

Wenn nichts anderes vermerkt ist, so sei $\nabla V = \nabla V(u(t,x))$.

Es ist

$$\begin{aligned} v_t(t,x) &= \nabla V \cdot u_t(t,x) \\ &= \nabla V \cdot \Big( \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) \Big) + \nabla V \cdot f(u(t,x)) \\ &= \int_\Omega k(x,y)v(t,y)dy - v(t,x) + \nabla V \cdot f(u(t,x)) \\ &\quad + \int_\Omega k(x,y)\big[\nabla V \cdot u(t,y) - \nabla V \cdot u(t,x) - V(u(t,y)) + V(u(t,x))\big]dy. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern hat die Form

$$\nabla V(u_1)\cdot u_2 - \nabla V(u_1)\cdot u_1 - V(u_2) + V(u_1) \quad .$$

Wegen der Konvexität von V erhält man

$$\int_\Omega k(x,y)\big[\nabla V \cdot u(t,y) - \nabla V \cdot u(t,x) - V(u(t,y)) + V(u(t,x))\big]\,dy \leq 0. \tag{3.6}$$

Demnach erfüllt v die Gleichung

$$v_t(t,x) = \int_\Omega k(x,y)v(t,y)dy - v(t,x) + h(t,x) \tag{3.7}$$

mit

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \nabla V \cdot f(u(t,x)) + \nabla V \cdot \Big( \int_\Omega k(x,y)u(t,y)dy - u(t,x) \Big) \\ &\quad - \int_\Omega k(x,y)V(u(t,y))dy + V(u(t,x)) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mit III Satz 3 und (3.5) ergibt sich daraus, daß u gleichmäßig beschränkt ist. Weiter folgt aus Satz 2, daß die Mengen

$$D_m := \{u \in X: V(u(x)) \leq m \text{ für alle } x \in \Omega\}$$

invariant bezüglich (3.1) sind und somit Satz 3 anwendbar ist.

Wir definieren

$$M(t) := \int_\Omega c(x)v(t,x)dx \quad ; \tag{3.9}$$

dabei sei $c > 0$ die in Abschnitt 1a) beschriebene Funktion, für die gilt

$$\int_\Omega c(x)k(x,y)dx = c(y) \quad \text{für alle } y \in \Omega \ , \tag{3.10}$$

$$\int_\Omega c(x)dx = \mathcal{C} \ .$$

Aus (3.8) und (3.10) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \int_\Omega c(x)v_t(t,x)dx \\ &= \int_\Omega c(x)\Big[\int_\Omega k(x,y)v(t,y)dy - v(t,x)\Big]dx + \int_\Omega c(x)h(t,x)dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

M ist also monoton fallend, und da V nach unten beschränkt ist, ist auch M nach unten beschränkt. Somit konvergiert $M(t)$ gegen eine Konstante $\overline{M}$.

Für $t \geq 0$ definieren wir eine Funktion $w(\tau,t,x)$ durch

$$w_\tau(\tau,t,x) = \int_\Omega k(x,y)w(\tau,t,y)dy - w(\tau,t,x) \ ,$$

$$w(0,t,x) = v(t,x) \ .$$

Aus III Satz 2 folgt damit

$$w(\tau,t,x) \geq v(t+\tau,x) \quad \text{für alle } t,\tau \geq 0, \ x \in \Omega \ .$$

Mit III Satz 6 und (III 4.2) erhält man

$$\lim_{\tau\to\infty} w(\tau,t,x) = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{\Omega} c(x)v(t,x)dx = \frac{1}{\mathcal{E}}M(t) ,$$

also

$$\lim_{\tau\to\infty} \sup\, v(t+\tau,x) \leq \frac{1}{\mathcal{E}}M(t)$$

oder

$$\overline{v}(x) := \lim_{t\to\infty} \sup\, v(t,x) \leq \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M} .$$

Es ergibt sich sogar

$$\lim_{t\to\infty} v(t,x) = \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M} \text{ für alle } x \in \Omega . \tag{3.11}$$

Denn angenommen, es gibt ein $x_o \in \Omega$ und eine Folge $(t_j)$ mit $t_j \to \infty$, so daß $v(t_j,x_o) \to \eta < \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M}$. Da nach Satz 3 die Pfade $\{u[t] : t \geq 0\}$ präkompakt sind, sind wegen der Glattheitsbedingung an V auch die Wege $\{v[t] : t \geq 0\}$ präkompakt in $C(\Omega)$. Deshalb kann man eine Teilfolge $(t_{j'})$ finden, für die gilt

$$\lim_{t_{j'}\to\infty} v(t_{j'},x) = \overline{v}(x) ,$$

und zwar gleichmäßig in $\Omega$. Daraus ergibt sich mit (3.9)

$$\overline{v}(x_o) = \eta < \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M} ,$$

$$\overline{v}(x) \leq \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M} ,$$

$$\int_{\Omega} \overline{v}(x)dx = \frac{1}{\mathcal{E}}\overline{M} .$$

Dies ist ein Widerspruch.

$v[t]$ konvergiert somit für $t \to \infty$ punktweise gegen eine Konstante. Da der Pfad $\{v[t] : t \geq 0\}$ präkompakt ist in $C(\Omega)$, kann man zu jeder Folge $(t_j)$ eine Teilfolge $(t_{j'})$ finden, für die gilt

$$\lim_{t_{j'}\to\infty} v[t_{j'}] = \overline{v} .$$

Daraus aber folgt $\overline{v}(x) = \frac{1}{\mathcal{C}}\overline{M}$; also hat man bezüglich der Konvergenz in $C(\Omega)$

$$\lim_{t\to\infty} v[t] = \frac{1}{\mathcal{C}}\overline{M} \quad . \tag{3.12}$$

Es ist

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_0^t v_\tau(\tau,x)d\tau + v(0,x) \\ &= \int_0^t \left( \int_\Omega \left( k(x,y)v(\tau,y)dy - v(\tau,x) + h(\tau,x) \right) d\tau + v(0,x) \right) \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wegen (3.12) ergibt sich für $t \to \infty$

$$\int_\Omega k(x,y)v(t,y)dy - v(t,x) \to 0 \quad ;$$

damit erhält man weiter wegen $h(t,x) \not\equiv 0$ für alle $t \geq 0$, $x \in \Omega$, und (3.12)

$$\lim_{t\to\infty} h[t] = 0 \quad .$$

Aus (3.6) - (3.8) folgt

$$\nabla v \cdot f(u(t,x)) \to 0 \quad . \tag{3.14}$$

Sei $(t_j)$ wieder eine Folge, $t_j \to \infty$. Es gibt eine Teilfolge $(t_{j'})$, so daß $u[t_{j'}]$ in X konvergiert, und zwar wegen (3.14) gegen eine stationäre Lösung der Gleichung (3.4). Da (3.4) nach Voraussetzung nur isolierte stationäre Lösungen besitzt, folgt die Konvergenz von $u[t]$ in X für $t \to \infty$. □

## 4. Das stationäre Gleichungssystem des Dirichlet-Problems

Zunächst beweisen wir einige Invarianzaussagen für die Lösungen der linearen und der semilinearen stationären Gleichungen. Mit Hilfe der Theorie des topologischen Abbildungsgrades erhalten wir dann einen allgemeinen Existenzsatz. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Übertragung eines entsprechenden Satzes für semilineare parabolische Differentialgleichungssysteme (s. Hadeler/Rothe/Vogt).

Satz 5 Es gelte $\mathcal{M}(x,y) = m(x,y)I$, $\tilde{\mathcal{M}}(x,z) = \tilde{m}(x,z)I$ für zwei skalare Funktionen m und $\tilde{m}$ (vgl. die Voraussetzungen zu Lemma 2). Wir setzen $M_o := M_i$ und $\tilde{M}_o := \tilde{M}_i$ für alle i, $1 \leq i \leq n$. Ist $M_o$ $u_o$-positiv, dann hat die Gleichung

$$u = Mu + \tilde{M}\psi \tag{4.1}$$

genau eine Lösung $u \in X$, und es ist $u(x) \in \overline{\text{conv } \psi(\Omega)} =: Q$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Anwendung der Sätze 8-10 aus Kapitel II auf jede Komponente von (4.1). Q als konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ läßt sich darstellen als Durchschnitt aller Stützhalbräume an Q, die Q enthalten. Jeder dieser Stützhalbräume ist gegeben durch eine Linearform $g^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so daß $g^*v \geq \gamma$ ist für alle v aus dem entsprechenden Halbraum. Sei jetzt u die Lösung von (4.1), $g^*$ eine beliebige der Q charakterisierenden Linearformen und $w(x) := g^* \cdot u(x)$. Dann ist w die Lösung der skalaren Gleichung

$$w = M_o w + \tilde{M}_o \phi$$

mit $\phi := g^*\psi$. Mit II Satz 10 erhält man $w \geq \inf_{z \in \Omega} \{\phi(z)\} 1_X$. Dies bedeutet für die Lösung des Gleichungssystems (4.1): $g^* \cdot \psi \geq \gamma \Longrightarrow g^* \cdot u \geq \gamma$,

d.h. u befindet sich im Durchschnitt aller Q enthaltenden Stützhalbräume an Q; somit ist $u(\Omega) \subset \overline{\text{conv}\ \psi(\tilde{\Omega})}$ . □

Anmerkung 2 Satz 5 läßt sich verallgemeinern auf den Fall beliebiger positiver Matrizen $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ , für die $r(M) < 1$ ist und für die gilt: Die Integrale über die Zeilensummen von $\mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}}$ sind in jeder Zeile und für jedes $x \in \Omega$ gleich 1.

Denn sei $g^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Linearform derart, daß

$$g^*(\mathcal{M}(x,y) + \tilde{\mathcal{M}}(x,z)) = (m_o(x,y) + \tilde{m}_o(x,z))g^* \qquad (4.2)$$

ist für zwei skalare, nichtnegative Funktionen $m_o$ und $\tilde{m}_o$. Es ist dann

$$\int_{\Omega} m_o(x,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}_o(x,z)dz = 1 \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Wie oben kann man zeigen: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, kompakte Menge, $\mathring{S} \neq \emptyset$, so daß für jeden Normalenvektor $g^*$ an $\partial S$ (4.2) erfüllt ist. Dann folgt für die Lösung u der stationären Gleichung (4.1)

$$\psi(\tilde{\Omega}) \subset S \implies u(\Omega) \subset S \quad .$$

Sind $\mathcal{M}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ Diagonalmatrizen, wie sie in Abschnitt 1a) beschrieben wurden, dann ist S ein n-dimensionaler Quader, denn die $g^*$, die (4.2) erfüllen, sind von der Form $g^* = g_i e_i$, $1 \leq i \leq n$, $g_i \in \mathbb{R}$; dabei ist $e_i$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$. Diese $g^*$ sind aber gerade die Normalenvektoren eines n-dimensionalen Quaders.

Satz 6 $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ , $M_o$ und $\tilde{M}_o$ seien definiert wie in Satz . $M_o$ sei stark positiv, u eine Lösung der Gleichung

$$u(x) = (Mu)(x) + (\tilde{M}\psi)(x) + f(u(x)) \qquad (4.3)$$

und S eine konvexe, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Weiter gelte $u(\Omega) \subset S$,

$\psi(\tilde{\Omega}) \subset S$, und S sei invariant bezüglich f.

Existiert ein $x_o \in \Omega$ mit $u(x_o) \in \partial S$, dann ist $u(\Omega) \subset \partial S$.

Beweis: Es sei $u(x_o) = q$, $q \in \mathbb{R}^n$, $q \in \partial S$ für ein $x_o \in \Omega$, und $\{v \in \mathbb{R}^n: g^* \cdot v = \gamma\}$ sei eine Stützhyperebene an $\partial S$ in q; $\{v \in \mathbb{R}^n: g^* \cdot v \geq \gamma\}$ sei der entsprechende Stützhalbraum, der S enthält, d.h. es ist $g^* \cdot u \geq \gamma$ für alle $u \in S$.

$w := g^* \cdot u$ ist eine Lösung der skalaren Gleichung

$$w(x) = (M_o w)(x) + (\tilde{M}_o \phi)(x) + h(u(x)) \quad ,$$

wobei $\phi(z) := g^* \cdot \psi(z)$ und $h(u) = g^* \cdot f(u)$ ist. Im Punkte $x_o$ erhält man wegen $w(x_o) = \gamma$, $w(x) \geq \gamma$ für alle $x \in \Omega$, $\phi(z) \geq \gamma$ für alle $z \in \tilde{\Omega}$ und $h \geq 0$

$$\gamma = (M_o w)(x_o) + (\tilde{M}_o \phi)(x_o) \quad .$$

Aus der starken Positivität von $M_o$ ergibt sich wie in II Satz 10

$$w(x) = \gamma \qquad \text{bzw.} \qquad g^* \cdot u(x) = \gamma \qquad \text{für alle } x \in \Omega \ .$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir formulieren nun den Existenzsatz:

Satz 7 Über die Voraussetzungen von 1a) hinaus gelte:

Es seien $\mathcal{M}(x,y) = m(x,y)I$, $\tilde{\mathcal{M}}(x,z) = \tilde{m}(x,z)I$ für zwei skalare Funktionen m und $\tilde{m}$, $M_o := M_i$ und $\tilde{M}_o := \tilde{M}_i$ für alle i, $1 \leq i \leq n$.

$M_o$ sei stark positiv. $S \subset \mathbb{R}^n$ sei konvex, kompakt und invariant unter f, und man habe $\psi(\tilde{\Omega}) \subset S$. Weiter gelte für die Lipschitz-Konstante F von f: $F < 1$.

Dann hat das Dirichlet-Problem (1.2) mindestens eine stationäre Lösung in S.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Sei $B := \{u \in X: u(x) \in S \text{ für alle } x \in \Omega\}$ .

Lemma 3 B ist abgeschlossen, beschränkt und konvex, und es gilt

$$\partial B = \{u \in B: u(x) \in \partial S \text{ für ein } x \in \Omega\}.$$

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus den Eigenschaften von S.

Sei $H := \{u \in B: u(x) \in \partial S \text{ für ein } x \in \Omega\}$.

i) Es ist $H \subset \partial B$, denn sei $u(x_0) \in \partial S$, $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| = 1$ mit $u(x_0) + \varepsilon h \notin S$.
Definiert man $u_1 := u + \varepsilon h$, so folgt: Für alle $u \in H$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $u_1 \in X$ mit $\|u - u_1\|_X = \varepsilon$ und $u_1 \notin B$. Daraus erhält man $u \notin \mathring{B}$ und somit $u \in \partial B$.

ii) Es gilt $B = \partial B \cup \mathring{B}$. Sei $G := \{u \in B: u(x) \in \mathring{S} \text{ für alle } x \in \Omega\}$.
Wenn wir $G \subset \mathring{B}$ zeigen können, dann ist die Behauptung bewiesen wegen

$$\partial B = B \setminus \mathring{B} \subset B \setminus G = H.$$

Sei $u \in G$. $\Omega$ ist kompakt, und man hat $u(\Omega) \subset \mathring{S}$; also gibt es ein $\delta > 0$ mit $\operatorname{dist}(u(\Omega), \partial S) = \delta > 0$. Demnach existiert für alle $u \in G$ ein $\delta_0 > 0$, so daß $u + \delta_0 \in G$ ist.
Daraus folgt $G \subset \mathring{B}$. □

Wir definieren den Operator $T_\lambda$, $\lambda \in [0,1]$, durch

$$(T_\lambda u)(x) := (Mu)(x) + (\tilde{M}\gamma)(x) + \lambda f(u(x)) \qquad (4.4)$$

und betrachten die Homotopie $T_\lambda u = u$. Für $\lambda = 0$ sind die Fixpunkte von $T_\lambda$ Lösungen der linearen Gleichung (4.1), für $\lambda = 1$ Lösungen der

semilinearen Gleichung (4.3).

Es gilt: Für alle $\lambda \in [0,1]$ ist $T_\lambda \in \mathcal{L}_F(X,X)$, $F < 1$ (zur Definition von $\mathcal{L}_F(X,X)$ s. III 5 Def.4).

Für die Operatoren $T_\lambda$ ist es möglich, einen Abbildungsgrad zu definieren, der alle Eigenschaften besitzt, die man für kompakte Operatoren hat (vgl. Lloyd, §6). Um mit Hilfe dieser Theorie eine Aussage über die Existenz stationärer Lösungen des semilinearen Problems zu erhalten, muß man zeigen, daß die Gleichung (4.4) keine Lösungen auf dem Rand von B haben kann.

Lemma 4 Die Voraussetzungen von Satz 6 seien erfüllt und es gelte

$$\overline{\psi(\tilde{\Omega})} \subset \mathring{S} \quad . \tag{4.5}$$

Dann hat die Gleichung $T_\lambda u = u$ für kein $\lambda \in [0,1]$ eine Lösung auf dem Rand von B.

Beweis: Wir betrachten zunächst das skalare Problem mit $S = [a_o, b_o]$. Angenommen, es gibt eine Lösung $u \in \partial B$, dann existiert o.B.d.A. ein $x_o \in \Omega$ mit $u(x_o) = a_o$. Es ist

$$a_o = u(x_o) = (M_o u)(x_o) + (\tilde{M}_o \psi)(x_o) + \lambda f(u(x_o)).$$

Daraus erhält man wie in III Satz 13 $u \equiv a_o$, und (4.5) kann nur erfüllt sein, wenn $\tilde{m}(x_o,z) = 0$ für alle $z \in \tilde{\Omega}$. Nach den Voraussetzungen von 1a) gibt es jedoch mindestens ein $\overline{x} \in \Omega$ mit $\int_{\tilde{\Omega}} m(\overline{x},z)dz > 0$. Für dieses $\overline{x}$ ergibt sich der Widerspruch $a_o = u(\overline{x}) > a_o$.

Die Übertragung auf den höherdimensionalen Fall erfolgt wie in den Sätzen 1 und 2 . □

Wir berechnen den Abbildungsgrad $\deg(I - T_o, \mathring{B}, 0)$ unter der Voraussetzung (4.5). Dazu zitieren wir den fogenden

Satz 8 (Deimling, Satz 20.5, S.77)

Es sei Z ein linearer, normierter Raum, $L \in \mathcal{L}(Z)$, L kompakt. $\nu^{-1}$ sei kein Eigenwert von L und $G \subset Z$ offen und beschränkt mit $0 \in G$. Dann ist

$$\deg(I - \nu L, G, 0) = (-1)^{\beta(\nu)} ,$$

wobei $\beta(\nu)$ die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte $\mu$ mit $\nu/\mu > 1$ ist; gibt es keine Eigenwerte dieser Art, so ist $\beta(\nu) = 0$.

Wegen $r(T_0) < 1$ erhält man aus diesem Satz sofort $(\nu = 1, \beta(\nu) = 0)$

$$\deg(I - T_0, \mathring{B}, 0) = 1.$$

Aus der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades folgt

$$\deg(I - T_1, \mathring{B}, 0) = 1.$$

Unter der Voraussetzung (4.5) haben wir somit die Behauptung von Satz 7 bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Bedingung (4.5) eliminiert werden kann. Sei $\psi(\tilde{\Omega}) \subset S$ und $\psi_0 \in \mathring{S}$ beliebig. Man definiert nun

$$\psi_\sigma(x) := (1 - \sigma)\psi(x) + \sigma\psi_0$$

für $\sigma \in [0,1]$. Es ist $\overline{\psi_\sigma(\tilde{\Omega})} \subset \mathring{S}$ für jedes $\sigma > 0$. Zu jedem $\sigma > 0$ existiert demnach eine Lösung $u_\sigma$ der Gleichung

$$u(x) = (Mu)(x) + (\tilde{M}\psi_\sigma)(x) + f(u(x)) . \qquad (4.6)$$

Es ist $u_\sigma \in B$.

Setzt man $v_\sigma := u_\sigma - f(u_\sigma)$, dann existiert wegen $F < 1$ eine stetige Funktion l mit $l(v_\sigma) = u_\sigma$, und man hat mit (4.6)

$$v_\sigma = Ml(v_\sigma) + \tilde{M}\psi_\sigma .$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(v_{\sigma'})$ der Folge $(v_\sigma)$ in X mit $\lim_{\sigma' \to 0} v_{\sigma'} = \bar{v}$ für ein $\bar{v} \in X$. $l(\bar{v}) = \bar{u} \in B$ ist dann die gesuchte Lösung. □

Anmerkung 3 Die Bedingung $F < 1$ ist nur im letzten Teil des Beweises notwendig, um zu zeigen, daß die Bedingung (4.5) eliminiert werden kann. Für die Anwendung der Theorie des Abbildungsgrades genügt $F \leq 1$.

## V. DIE NICHTLINEAREN KONTINUIERLICHEN MODELLE

### 1a) Die Gleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir kurz die kontinuierlichen Gleichungen, die den nichtlinearen Modellen in I 3 und II 3 entsprechen. Bis auf Abschnitt 4 sind alle Gleichungen skalar.

Es sei

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_{\Omega} k(x,y)g(u(t,y))dy - u(t,x) \quad , \\ u(0,x) &= u^0(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

das nichtlineare Neumann-Problem und

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \int_{\Omega} m(x,y)g(u(t,y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz - u(t,x), \\ u(0,x) &= u^0(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

das nichtlineare Dirichlet-Problem.

Wir übernehmen für dieses Kapitel alle Bezeichnungen und Voraussetzungen aus III 1b) und fordern für $g$ (vgl. I(3.3)): $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, $L := \sup_{u \in \mathbb{R}} |g'(u)| < \infty$ , und es gelte

$$\begin{aligned} &g(0) = 0 \ , \quad g(1) = 1 \ , \\ &g'(0) > 1 \ , \quad g'(u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \geq 0 \ , \\ &\frac{g(u)}{u} \text{ sei streng monoton fallend für } u > 0 \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} &g(u) > u \quad \text{für } 0 < u < 1 \ , \\ &g(u) < u \quad \text{für } u > 1 \quad , \end{aligned} \tag{1.4}$$

1b) Ein Existenzsatz

Den folgenden Satz beweist man wie die entsprechende Aussage in III 2.

Satz 1 Unter den Voraussetzungen 1a) gilt:
Für alle $T > 0$ und alle $u^0 \in X$ haben die Gleichungen (1.1) bzw. (1.2) genau eine Lösung $u \in C_T$. u hängt stetig von $u^0$ ab und ist stetig differenzierbar nach t.

Für den Beweis benötigt man nur die Existenz einer globalen Lipschitz-Konstanten für g; die Bedingungen (1.3) brauchen wir später.

Anmerkung 1 Ist $g = g(x,u)$ eine stetige Funktion von $x \in \Omega$ und Lipschitz-stetig in u mit einer globalen Lipschitz-Konstanten L, dann gilt Satz 1 unverändert.

Anmerkung 2 Für den vektorwertigen Fall übernehmen wir die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus IV 1a) und fordern für $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ :

$$g(u) := (g_1(u_1), \ldots, g_n(u_n))^* .$$

Erfüllt jede Komponente $g_i$ von g die für den Beweis von Satz 1 notwendigen Bedingungen, so gilt der Existenzsatz auch für die (1.1) und (1.2) entsprechenden Differentialgleichungssysteme.
Anmerkung 1 ist ebenfalls sofort auf diesen Fall übertragbar.

## 2. Ein Vergleichssatz und das schwache Maximum-Prinzip

Analog zu III 3 Definition 1 setzen wir für $u \in C_T$

$$(Pu)(t,x) := u_t(t,x) - \int_\Omega k(x,y)g(u(t,y))dy + u(t,x)$$

und

$$(Q_\psi u)(t,x) := u_t(t,x) - \int_\Omega m(x,y)g(u(t,y))dy - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\psi(z)dz + u(t,x).$$

Da III Lemma 2 und III Korollar 2 unabhängig von den jeweils betrachteten Gleichungen gelten, können wir sie auch hier anwenden. Für den Beweis des folgenden Satzes benötigt man aus (1.3) nur $g'(u) \geq 0$ und $L < \infty$.

Satz 2 Es seien $u, v \in C_T$, stetig differenzierbar nach t in $[0,T]$, und $u(0,x) = u^0(x)$, $v(0,x) = v^0(x)$, $u^0 \geq v^0$.

i) Ist $Pu \geq Pv$, dann gilt $u \geq v$ in G.

ii) Ist $\psi \geq \sigma$, $\psi, \sigma \in Y$, und $Q_\psi u \geq Q_\sigma v$, dann gilt $u \geq v$ in G.

Beweis: Wie in III Satz 2 genügt es, ii) zu beweisen.

Sei $\rho(t) := \tilde{\varepsilon}\exp(\tilde{L}(t-T))$, $\tilde{L} > L$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, und $\omega(t,r) = Lr$.

Es ist $0 < \delta := \tilde{\varepsilon}\exp(-\tilde{L}T) \leq \rho(t) \leq \tilde{\varepsilon}$, $\rho'(t) > L\rho(t)$ für alle $t \in [0,T]$ und somit ist $\omega(t,r) \in E$ für dieses $\rho$ und $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$ (s. III Definition 2).

Kann man zeigen, daß $v < u + \rho$ in G ist, so folgt die Behauptung, da $\rho$ beliebig klein gewählt werden kann.

Sei $\chi := u + \rho - v$. Es ist $\chi(0,x) > 0$. $\chi$ erfüllt die Voraussetzungen von III Lemma 2: Es sei $(t_0,x_0)$ ein 'erstes' Minimum (im Sinne von III Lemma 2) von $\chi$ mit $\chi(t_0,x_0) = 0$, also $u(t_0,x_0) + \rho(t_0) = v(t_0,x_0)$.

Dann erhält man wegen $Q_\psi u \geq Q_\sigma v$

$$0 \leq u_t(t_0,x_0) - v_t(t_0,x_0) - \rho(t_0) + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x_0,z)(\sigma(z) - \psi(z))dz + \int_\Omega m(x_0,y)(g(v(t_0,y)) - g(u(t_0,y)))dy$$

$$\leq u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + \int_\Omega m(x_o,y)(g(v(t_o,y)) - g(u(t_o,y)))dy$$

$$\leq u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + L\varphi(t)\int_\Omega m(x_o,y)dy$$

$$< u_t(t_o,x_o) - v_t(t_o,x_o) + \varphi'(t_o) = \chi_t(t_o,x_o).$$

Mit III Lemma 2 ergibt sich die Behauptung. □

Das folgende schwache Maximum-Prinzip entspricht den Aussagen (I 3.6), I Lemma 7, (II 3.3) und II Satz 12.

Satz 3 Es sei $u \in C_T$, und u sei stetig differenzierbar nach t in $[0,T]$.

i) Definiert man $\underline{\beta} := \min_{x\in\Omega} \{u^o(x),1\}$, $\overline{\beta} := \max_{x\in\Omega} \{u^o(x),1\}$, dann gilt

$u \leq \overline{\beta}\mathbb{1}_\chi$ $(u \geq \underline{\beta}\mathbb{1}_\chi)$, falls $Pu \leq 0$ $(Pu \geq 0)$ ist.

ii) Definiert man $\underline{\alpha} := \min_{\substack{x\in\Omega\\ z\in\bar{\Omega}}} \{u^o(x),\psi(z),1\}$ , $\overline{\alpha} := \max_{\substack{x\in\Omega\\ z\in\bar{\Omega}}} \{u^o(x),\psi(z),1\}$,

dann gilt $u \leq \overline{\alpha}\mathbb{1}_\chi$ $(u \geq \underline{\alpha}\mathbb{1}_\chi)$, falls $Q_\psi u \leq 0$ $(Q_\psi u \geq 0)$ ist.

Beweis: Es genügt, den ersten Teil von ii) zu beweisen.

Wir setzen in III Korollar 2 $w(t,x) = w(t) := \overline{\alpha} + \delta t + \tilde{\varepsilon}$ , $\delta, \tilde{\varepsilon} > 0$, $\delta T + \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , und $v(t,x) := u(t,x)$. Es sei $w(t_o,x_o) = u(t_o,x_o)$ für ein $(t_o,x_o) \in G$ und $w(t,x) > u(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,t_o) \times \Omega$ .

Dann erhält man wegen $Q_\psi u \leq 0$ und $u(t_o,y) \leq \overline{\alpha} + \delta t_o + \tilde{\varepsilon} = w(t_o)$ , $w(t_o) \geq 1$ sowie der Eigenschaften von g

$$u_t(t_o,x_o) = (\delta t_o + \tilde{\varepsilon})\Big(\int_\Omega m(x_o,y)dy - 1\Big) \leq 0 < \delta.$$

Somit ist $u_t(t_o,x_o) < w'(t_o)$, und da $\delta$ und $\tilde{\varepsilon}$ beliebig gewählt werden können, folgt die Behauptung.

Für den Beweis des zweiten Teils von ii) setzt man in III Korollar 2 $w(t,x) := u(t,x)$, $v(t,x) = v(t) := \underline{\alpha} - \delta t - \tilde{\varepsilon}$ . □

## 3. Konvergenz der Lösungen des Neumann-Problems

Mit den in Kapitel III benutzten Methoden läßt sich auch für das nichtlineare Problem der folgende Satz, der dem Ergebnis für das diskrete Modell (II Satz 11) entspricht, beweisen.

Satz 4 Sei K $u_0$-positiv, $u^0 \in \mathcal{K}_0$, $u^0 \neq 0$, und g erfülle die Voraussetzungen aus 1a). Dann gilt für die Lösung u von (1.1)

$$\lim_{t \to \infty} \| u[t] - \mathbb{1}_X \|_X = 0.$$

Beweis: Aus III Satz 4, III Satz 6 und Satz 2 folgt $u(t,x) > 0$ für alle $t > 0$ und alle $x \in \Omega$; denn sei $\tilde{u}^*(t,x)$ die Lösung der Differentialgleichung $u^*_t[t] = (K - I)u^*[t]$, $(\tilde{u}^*)^0 \in \mathcal{K}_0$, $(u^*)^0 \neq 0$, $(\tilde{u}^*)^0 \leq u^0$, dann erhält man $\lim_{t \to \infty} \| u^*[t] - \tilde{u}^* \mathbb{1}_X \|_X = 0$, $\tilde{u}^* > 0$ und $u^* \leq u$.

O.B.d.A. kann man demnach $u^0 > 0$ voraussetzen.

Sei $u^0 \leq \mathbb{1}_X$. Wir wählen eine Konstante $\underline{u}^0$ mit $0 < \underline{u}^0 \leq \min_{x \in \Omega} \{u^0(x)\}$.

$\underline{u}(t)$ sei die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\underline{u}} = g(\underline{u}) - \underline{u}$, $\underline{u}(0) = \underline{u}^0$. Da $\underline{u}$ auch Lösung von (1.1) ist, ergibt sich $\underline{u}(t) \leq u(t,x) \leq 1$ für alle $t > 0$ und alle $x \in \Omega$. Wegen $\dot{\underline{u}}(t) > 0$ für alle $\underline{u}(t) < 1$ folgt die Behauptung für $u^0 \leq \mathbb{1}_X$.

Den Rest des Beweises erhält man wie in III Satz 9. □

## 4. Die stationäre Gleichung des Dirichlet-Problems

Im Gegensatz zum Neumann-Problem stellt sich für das Dirichlet-Problem (1.2) wie im semi-linearen Fall die Frage, unter welchen Bedingungen überhaupt stationäre Lösungen existieren. Diese Frage ist jedoch für das vorliegende nichtlineare Modell relativ leicht zu beantworten. Wir beweisen den folgenden Satz für das (1.2) entsprechende Differentialgleichungssystem und übernehmen die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus IV 1a) und Anmerkung 2. Für die Matrizen $\mathcal{M}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ gelte $\mathcal{M}(x,y) := m(x,y)I$ und $\tilde{\mathcal{M}}(x,z) := \tilde{m}(x,z)I$ mit zwei skalaren Funktionen m und $\tilde{m}$.

Satz 5 Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge. Es gelte $\Psi(\tilde{\Omega}) \subset S$, $g(S) \subset S$. Wir definieren $B := \{u \in X : u(\Omega) \subset S\}$.
Dann hat das Differentialgleichungssystem

$$u_t(t,x) = \int_{\Omega} m(x,y)g(u(t,y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz - u(t,x), \qquad u^0 \in B \tag{1.5}$$

mindestens eine stationäre Lösung $u_s \in B$.

Beweis: Sei $(Tu)(x) := \int_{\Omega} m(x,y)g(u(y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)\Psi(z)dz$ .

Da $T:X \to X$ ein kompakter Operator ist, folgt die Behauptung mit dem Fixpunktsatz von Schauder, wenn man zeigen kann, daß $T(B) \subset B$ gilt, denn B ist abgeschlossen, beschränkt und konvex.
S ist der Durchschnitt aller Stützhalbräume an S, die S enthalten. Sei $h^*$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$, $\varrho \in \mathbb{R}$ und $\{w \in \mathbb{R}^n : h^*w \geq \varrho\}$ ein solcher Stützhalbraum. Dann erhält man für alle $x \in \Omega$

$$h^*\cdot(Tu)(x) = \int_{\Omega} m(x,y)h^*\cdot g(u(y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)h^*\cdot\Psi(z)dz \geq \varrho ,$$

da $h^*\cdot g(u(y)) \geq \varrho$ für alle $y \in \Omega$, $h^*\cdot\Psi(z) \geq \varrho$ für alle $z \in \tilde{\Omega}$ und

$\int_{\Omega} m(x,y)dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x,z)dz = 1$ für alle $x \in \Omega$ ist.

Daraus folgt, daß Tu im Durchschnitt aller S enthaltenden Stützhalbräume an S liegt; also gilt $T(B) \subset B$. □

Wie für das entsprechende semilineare Problem gilt, daß der Satz auch für beliebige Diagonalmatrizen $\mathcal{M}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ wie in IV 1a) gültig bleibt, wenn S ein n-dimensionaler Quader ist.

Verschärft man die Bedingungen von Satz 5, so kann man wie für die entsprechenden Probleme in Kapitel I und II sogar Eindeutigkeit der stationären Lösung zeigen. Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz wie der der Eindeutigkeitsaussage in I Satz 11, indem man die dort ausgeführten Schlüsse komponentenweise überträgt.

Satz 6 Es seien die Voraussetzungen von IV 1a), 1a) und Anmerkung 2 erfüllt. $\mathcal{M}$ und $\tilde{\mathcal{M}}$ seien die entsprechenden Diagonalmatrizen, M und $\tilde{M}$ die zugehörigen Integraloperatoren. M sei stark positiv. Dann ist der Operator $T: X \to X$ mit

$$(Tu)(x) := \int_{\Omega} \mathcal{M}(x,y)g(u(y))dy + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathcal{M}}(x,z)\psi(z)dz$$

$u_o$-konkav (d.h. jede Komponente $T_i, 1 \le i \le n$, ist $u_o$-konkav), und T besitzt höchstens einen Fixpunkt in X. Sind für den n-dimensionalen Quader $S \subset \mathbb{R}^n$ die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so hat T genau einen Fixpunkt in B.

Literaturverzeichnis

D.G.Aronson [1]

Topics in nonlinear diffusion

CBMS/NSF Lecture Notes,

Regional Conference on Nonlinear Diffusion,

Houston (1976)

D.G.Aronson [2]

The asymptotic speed of propagation of a simple epidemic

in: Nonlinear Diffusion, W.E.Fitzgibbon,H.F.Walker (eds),

Research Notes in Mathematics 14,

Pitman Publishing Co., London, 1-23 (1977)

C.Atkinson/G.E.H.Reuter

Deterministic epidemic waves

Math.Proc.Camb.Phil.Soc., 80, 315-330 (1976)

F.L.Bauer

An elementary proof of the Hopf inequality for positive

operators

Numerische Mathematik 7, 331-337 (1965)

A.Belleni-Morante

Applied Semigroups and Evolution Equations

Clarendon Press, Oxford (1979)

L.Collatz

Funktionalanalysis und numerische Mathematik

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1968)

K.Deimling

Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1974)

O.Diekmann [1]

On a nonlinear integral equation arising in mathematical epidemiology

Mathematical Centre Report TW 170/77

Amsterdam (1977)

O.Diekmann [2]

Limiting behaviour in an epidemic model

Nonlin.Anal., Theory, Methods, Appl. 1,459-470 (1977)

O.Diekmann [3]

Thresholds and travelling waves for the geographical spread of an infection

J.Math.Biol. 6, 109-130 (1978)

O.Diekmann [4]

Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic

J.Diff.Eqs. 33, 58-73 (1979)

O.Diekmann/H.G.Kaper

On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation

Nonlin.Anal.,Theory,Methods,Appl. 2, 721-737 (1978)

N.Dunford/J.T.Schwartz

Linear Operators I

John Wiley & Sons, New York-London (1967)

H.G.Eggleston

Convexity

Cambridge University Press (1958)

G.Eisenack/C.Fenske

Fixpunkttheorien

Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich (1978)

P.C.Fife

Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems

Lecture Notes in Biomathematics 28

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979)

R.A.Fisher

The advance of advantageous genes

Ann. of Eugenics 7, 355-369 (1937)

K.P.Hadeler [1]

Mathematik für Biologen

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1974)

K.P.Hadeler [2]

Diffusion in Fisher's population model

Rocky Mountain Journ. of Math. 11 (1), 39-45 (1981)

K.P.Hadeler [3]

Selection in a cyclically changing environment

preprint (1981)

K.P.Hadeler/F.Rothe/H.Vogt

Stationary solutions of reaction-diffusion equations

Math.Meth. in the Appl.Scs. 1, 418-431 (1979)

E.Hille/R.S.Phillips

Functional Analysis and Semi-Groups

American Mathematical Society, Providence (1957)

H.Jeggle

Nichtlineare Funktionalanalysis

B.G.Teubner, Stuttgart (1979)

S.Karlin

Population subdivision and selection migration interaction

in: Proceedings of the International Conference on

Population Genetics and Ecology

Academic Press, New York (1976)

D.G.Kendall

Mathematical models of the spread of infections

Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine

Medical Research Council (1965)

W.O.Kermack/A.G.McKendrick

A contribution to the mathematical theory of epidemics

Proc.Roy.Soc.,A,115, 700 (1927)

M.A.Krasnoselskij [1]

Positive Solutions of Operator Equations

P.Nordhoff Ltd., Groningen (1964)

M.A.Krasnoselskij [2]

Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations

Pergamon Press, Oxford (1964)

M.A.Krasnoselskij [3]

Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen

Akademie-Verlag, Berlin (1973)

M.G.Krein/M.A.Rutman

Linear oprators which leave a cone in Banach space invariant

Usp.Mat.Nauk. 23 (1948)

und : Amer.Math.Soc.Translation No. 26 (1950)

T.Li/J.A.Yorke

Period three implies chaos

Amer.Math.Monthly 82, 985-992 (1975)

N.G.Lloyd

Degree Theory

Cambridge University Press, Cambridge (1978)

I.Marek [1]

Spektrale Eigenschaften der $\mathcal{K}$-positiven Operatoren und Einschließungssätze für den Spektralradius

Czech.Math.J., T 16 (91), 493-517 (1966)

I.Marek [2]

$u_o$-positive operators and some of their applications

SIAM-J.Appl.Math. Vol. 15, No 3, 484-494 (1967)

I.Marek [3]

Frobenius theory of positive operators: comparison theorems and applications

SIAM-J.Appl.Math. Vol 19, No.3, 607-628 (1970)

D.Mollison [1]

The rate of spatial propagation of simple epidemics

Proc. $6^{th}$ Berkeley Symp.Math.Statist. and Prob. Vol 3 (1972)

D.Mollison [2]

Possible velocities for a simple epidemic

Adv.Appl.Prob. 4, 233-257 (1972)

R.Nagel

Unbeschränkte Operatoren

Vorlesungsskript, Tübingen, Wintersemester 1977/78

H.H.Schaefer [1]

Spektraleigenschaften positiver linearer Operatoren

Math. Zeitschrift 82, 303-313 (1963)

H.H.Schaefer [2]

Banach Lattices and Positive Operators

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1974)

K.Schumacher [1]

Travelling-front solutions for integrodifferential equations

Journ.f.d.reine und angew.Math, 316, 54-70 (1980)

K.Schumacher [2]

Travelling-front solutions for integrodifferential equations II

Biological Growth and Spread, Mathematical Theories and Applications, Proceedings, Heidelberg 1979

Lecture Notes in Biomathematics 38, 296-309

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980)

K.Schumacher [3]

persönliche Mitteilung

R.S.Varga

Matrix Iterative Analysis

Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1962)

W.Walter

Differential and Integral Inequalities

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970)

H.F.Weinberger [1]

Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems

Rendiconti di Matematica (1), Vol.8, Serie VI,295-310 (1975)

H.F.Weinberger [2]

Asymptotic behaviour of a model in population genetics

Nonlinear Partial Differential Equations and Applications

J.M.Chadam (ed.), Lecture Notes in Mathematics Vol. 648

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,47-96 (1978)

H.F.Weinberger [3]

Asymptotic behaviour of a class of discrete-time models in population genetics

Proc.Conf.on Appl.Nonlin.Anal., V.Lakshmikantham (ed.), Academic Press, New York (1979)

D.M.Young

Iterative Solutions of Large Linear Systems

Academic Press, New York and London (1971)

Lebenslauf

Am 19. September 1952 wurde ich in München geboren. Meine Eltern sind Georg Baron Pilar v. Pilchau und seine Frau Anneliese geb. Pungs. Mein Vater ist Papieringenieur und betreibt zusammen mit meiner Mutter ein Ingenieurbüro.

Seit dem 14. März 1975 bin ich mit dem Juristen Paul-Adolf v. Hehn verheiratet.

Von Ostern 1959 bis Ostern 1963 besuchte ich Volksschulen in Köln und Mannheim, von Ostern 1963 bis Juni 1970 das Elisabeth-Gymnasium in Mannheim, das Schubart-Gymnasium in Aalen und das Staatliche Gymnasium in Jülich, wo ich mein Abitur ablegte.

Vom Wintersemester 1970/71 bis zum Sommersemester 1973 studierte ich Mathematik an der TH Aachen. Meine Nebenfächer waren Physik und Medizin. Im Herbst 1972 bestand ich das Vordiplom. Zum Wintersemester 1973/74 wechselte ich an die Universität Tübingen, wo ich Biologie als Nebenfach wählte. Im Oktober 1976 legte ich die Diplomprüfungen ab.

Von April bis Oktober 1976 arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft im Fernstudienprojekt Biologie mit und führte diese Arbeit von November 1976 bis Juli 1978 als Koordinationsassistentin fort.

Anschließend war ich von August 1978 bis Juni 1982 wissenschaftliche Assistentin am Leibniz Kolleg Tübingen.

Seit Februar 1978 arbeite ich unter der Anleitung von Herrn Professor Hadeler an der vorliegenden Dissertation.

Meine akademischen Lehrer in Aachen waren die Herren

Erwe, Grosse, Kaerkes, Krabs, Repges, Schlögl, Schoedon, Schöneborn, Stahl, Thiel.

Meine akademischen Lehrer in Tübingen waren die Herren

Beekmann, Braitenberg, Felgner, Felscher, Hadeler, Heyer, Kaul, Kaup, Locher, Meinhardt, Nagel, Schaefer, Seyffert, Tamaschke, Varjú, Wielandt, Wolff, Zeller.

Ihnen allen gilt mein Dank.